Otros libros de la colección

Lógica informal
Falacias y argumentos filosóficos
Juan Manuel Comesaña

La Verdad Desestructurada
Eduardo Alejandro Barrio

Concepciones de la Referencia
Eleonora Orlando

Conjuntos e infinitos
Ana Carolina Sartorio

Forma y modalidad
Una introducción al concepto
de consecuencia lógica
Mario Gómez Torrente

La paradoja de Orayén
Alberto Moretti y Guillermo Hurtado
(compiladores)

Lógica, lenguaje y significado
Volumen I: Introducción a la lógica
Volumen II: Lógica intensional
y gramática lógica
L. T. F. Gamut

enciclopedia lógica

Eduardo Alejandro Barrio (Director)

Esta colección se propone presentar las principales discusiones de la lógica contemporánea, explorando los problemas filosóficos que a ella subyacen. La idea es que cada volumen reconstruya un problema actual de manera clara y exhaustiva. En todos los casos, no sólo se intenta describir el estado de las discusiones en torno a ese desafío, sino además ofrecer puntos de vista originales.

En *La Lógica de la Verdad* se aborda un problema central: ¿cuál es la lógica de un lenguaje que intenta representar su propio predicado veritativo? El libro puede verse como una respuesta a fondo al desafío planteado por el conocido Teorema de Tarski de indefinibilidad de la verdad. ¿Puede capturarse consistentemente la noción de *verdad* revisando la lógica clásica?, ¿cuál es la lógica resultante de tal emprendimiento? Este volumen contiene, además, una exposición detallada de cada una de las teorías contemporáneas de la verdad: la teoría tarskiana, la teoría de la verdad como un punto fijo, la de la revisión, las teorías paracompletas y las paraconsistentes. En todos los casos, se incluyen ejercicios y una bibliografía complementaria.

eudeba
www.eudeba.com.ar

ISBN 978-950-23-2268-1
9 789502 322681

LA LÓGICA DE LA VERDAD Eduardo Alejandro Barrio (Director)

LA LÓGICA DE LA VERDAD

Eduardo Alejandro Barrio (Director)

eudeba

Eduardo Alejandro Barrio es profesor regular de Lógica de la Universidad de Buenos Aires e investigador independiente del Conicet. Su trabajo de investigación alrededor de las paradojas semánticas ha sido publicado en prestigiosas revistas de impacto internacional como *Studia Logica* y *The Review of Symbolic Logic*. Es director de la colección "Enciclopedia Lógica" de Eudeba, donde además ha publicado *La Verdad Desestructurada*. Actualmente, dirige el *Grupo de Lógica de Buenos Aires*, integrado por Natalia Buacar (UBA), Federico Pailos (UBA-Conicet), Lavinia Picollo (UBA-Conicet), Lucas Rosenblatt (UBA-Conicet), Damián Szmuc (UBA), Diego Tajer (UBA-Conicet) y Paula Teijeiro (UBA-Conicet), que realiza investigaciones conjuntas con los grupos de Lógica de la Universidad de Oxford y del Munich Center for Mathematical Philosophy (MCMP), Munich.

enciclopedia lógica

Director de colección
Eduardo Alejandro Barrio

La l gica de la verdad.indd 1 27/02/2014 15:53:46

La l gica de la verdad.indd 2 27/02/2014 15:53:46

LA LÓGICA DE LA VERDAD

Eduardo Alejandro Barrio
(Director)

eudeba

La l gica de la verdad.indd 3 27/02/2014 15:53:47

La lógica de la verdad / Eduardo Alejandro Barrio ... [et.al.] ; dirigido por Eduardo Alejandro Barrio. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Eudeba, 2014.
304 p. ; 23x16 cm. - (Enciclopedia lógica / Eduardo Barrio)

ISBN 978-950-23-2268-1

1. Filosofia. I. Barrio, Eduardo Alejandro II. Barrio, Eduardo Alejandro, dir.
CDD 190

Eudeba
Universidad de Buenos Aires

1ª edición: marzo de 2014

© 2014
Editorial Universitaria de Buenos Aires
Sociedad de Economía Mixta
Av. Rivadavia 1571/73 (1033) Ciudad de Buenos Aires
Tel.: 4383-8025 / Fax: 4383-2202
www.eudeba.com.ar

Diseño de tapa: *Lisandro Aldegani*
Corrección y composición general: Eudeba

Impreso en Argentina.
Hecho el depósito que establece la ley 11.723

No se permite la reproducción total o parcial de este libro, ni su almacenamiento en un sistema informático, ni su transmisión en cualquier forma o por cualquier medio, electrónico, mecánico, fotocopia u otros métodos, sin el permiso previo del editor.

La l gica de la verdad.indd 4 27/02/2014 15:53:48

Índice

Introducción 9
Eduardo Alejandro Barrio

Bibliografía *23*

Capítulo 1. Definiciones tarskianas de la verdad 25
Eduardo Alejandro Barrio

1. Verdad y consecuencias 26
2. Presentación intuitiva 28
3. Definiciones tarskianas de verdad 33
   3.1. Definiciones de verdad sin dominios 33
   3.2. La verdad relativa a un modelo M 40
4. El Teorema de la Indefinibilidad de la Verdad 55
   4.1. Indefinibilidad de la verdad para lenguajes de orden finito 56
   4.2. Indefinibilidad de la verdad para lenguajes de tipo infinito 59
   4.3. Indefinibilidad de la verdad para la aritmética 64

Conclusión 65
Apéndice 67
Bibliografía 70
Lecturas sugeridas 71

Capítulo 2. Teoría de Puntos Fijos de Kripke 75
Paula Teijeiro y Damián E. Szmuc

1. Crítica a las jerarquías tarskianas 76

La l gica de la verdad.indd 5 27/02/2014 15:53:48

1.2 Infundación 76
1.2.1 Infundación inherente 77
1.2.2 Infundación empírica 78
2. Teoría de Puntos Fijos 80
2.1 Exposición conceptual 80
2.2 Semántica de puntos fijos 83
2.3 Algunas decisiones 99
3. Problemas en torno al condicional: la invalidez del Esquema-T 105
4. El regreso del metalenguaje 107
5. Revanchas 109
6. Conclusión 111
Apéndice: Axiomatizaciones de la Teoría de Puntos Fijos de Kripke 113
Biliografía 115
Bibliografía comentada 116

Capítulo 3. La Teoría Revisionista de la Verdad 117
Natalia M. Buacar y Lavinia M. Picollo

1 Introducción 118
1.1 Preliminares 118
1.2 El problema a resolver 120
1.3 Una intuición fundamental 121
1.4 La tesis de la significación 122
1.5 Algunos desiderata 122
1.6 Verdad circular 124
2. Una presentación formal de la teoría revisionista de la verdad 129
2.1 La teoría de las definiciones de Gupta y Belnap 129
2.2 Una definición circular de 'verdad'. 133
2.3 Secuencias de revisión 135
2.4 Las teorías T^*, $T^{\#}$ y T° 141
2.5 Algunos resultados sobre los tres sistemas 149
2.6 Verdad en la aritmética 152
3 Problemas y soluciones alternativas 158
3.1 Políticas de bootstrapping 158
3.2 Venganzas 175
4. Conclusiones 179
Apéndice: Un punto de vista axiomático 181
Bibliografía 185
Bibliografía comentada 186

La l gica de la verdad.indd 6 27/02/2014 15:53:48

Capítulo 4. Paracompletitud sofisticada 187
Lucas Rosenblatt y Federico Pailos

1. Introducción 187
2. Combinar secuencias de revisión con puntos fijos..... 190
3. La semántica de vecindades 200
4. Una variación de Yablo..... 204
5. La teoría de Field, en versión sofisticada 210
6. Sobre el operador de 'Determinación' 214
7. Objeciones 230
   7.1 ¿Es el condicional razonable? 230
   7.2 Cuantificaciones restringidas 232
   7.3 Otras paradojas 234
   7.4 ¿Es la teoría realmente inmune a las revanchas? 240
8. Conclusión 243
   Apéndice: Un condicional razonable..... 244

Bibliografía..... 246
   Bibliografía comentada..... 247

Capítulo 5. Dialeteísmo: una teoría contradictoria de la verdad..... 249
Diego Tajer

1. Introducción 249
2. LP como sistema lógico 252
3. Condicionales 261
4. Teorías de la verdad 270
5. ¿Dónde están las dialeteias?..... 277
6. Objeciones al dialeteísmo 279
   6.1 Perdemos varias leyes fundamentales del razonamiento 280
   6.2 No se logra un objetivo central: tener un lenguaje semánticamente cerrado 282
   6.3 El autoboicot del dialeteísmo..... 286
   6.4 La anormalidad de los mundos anormales 287
7. Conclusión..... 289
   Apéndice: axiomatizaciones de las teorías..... 290

Bibliografía..... 291
   Bibliografía comentada..... 292

La l gica de la verdad.indd 8 27/02/2014 15:53:48

Introducción

Eduardo Alejandro Barrio

La posibilidad de tener lenguajes con máxima capacidad expresiva es una fuerte tentación. A fin de cuentas, todo intento explicativo en la búsqueda de la comprensión de la totalidad de las cosas debería ser expresados en un lenguaje universal: uno con suficientes recursos como para hablar de *todo*. Claro que podrían resultar misteriosos estos lenguajes. Sin embargo, Tarski (1935: 164) los vincula directamente con nuestros lenguajes naturales.

> A characteristic feature of colloquial language … is its universality. It would not be in harmony with the spirit of this language if in some other language a word occurred which could not be translated into it; it could be claimed that 'if we can speak meaningfully about anything at all, we can also speak about it in colloquial language'.

Así, el español, el inglés, el alemán y el francés serían lenguajes universales. Ahora bien, tal como ocurre con estos instrumentos lingüísticos, un lenguaje capaz de describirlo todo también debería tener, como parte de sus medios expresivos, la posibilidad de hablar de su propia semántica. Esto es, un lenguaje universal debería tener suficientes recursos expresivos como para representar su propio predicado veritativo. De esta manera, y tal como hacemos en nuestros lenguajes naturales, deberíamos ser capaces de predicar verdad frente a todas aquellas oraciones que estamos dispuestos a aceptar. Casos como:

La l gica de la verdad.indd 9 04/07/2014 13:46:43

'La nieve es blanca' es verdadera

o

'No es cierto que llueve y no llueve' es una verdad lógica

o incluso:

'La regla de Modus Ponens preserva verdad' es verdadera.

Son aserciones que deberíamos poder hacer sin problemas en un lenguaje universal.

Si prestamos atención al uso del predicado veritativo en los lenguajes naturales, los vínculos entre aserción y verdad parecen indicar que la verdad debería ser transparente: lo que aceptamos es lo que tomamos como verdadero y lo que rechazamos es lo que no lo es. Así, por ejemplo, al aceptar que la nieve es blanca nos vemos comprometidos con su verdad y si lo rechazáramos, nos comprometeríamos a tomarlo como no verdadero. Sea *Tr*(x) el predicado veritativo de un lenguaje, α una oración y 'A' un nombre para A. Técnicamente, la transparencia de la verdad consiste en que para toda α, Tr('A') y A son intersubstituibles en todos los contextos no opacos. Así, si

$\vdash A \supset A$ [1]

entonces, asumiendo que el condicional no genera contextos opacos se sigue por transparencia que:

$\vdash Tr('A') \supset Tr('A')$

La transparencia de la noción de *verdad* es usualmente tomada como un mecanismo de captura y liberación. Imaginemos un hablante omnisciente, Zeus si se lo desea, con poderes super-humanos. Él podría listar un conjunto infinito enumerable de oraciones en un tiempo finito. Esta capacidad le permitiría usar sólo el fragmento sin el predicado de verdad del castellano para especificar cualquier información acerca de su entorno. Simplemente, Zeus no necesitaría

1 A lo largo de este libro, hemos tomado la decisión de usar '⊃' para expresar el condicional material y '→' para expresar los condicionales especiales que se introducen en los diferentes sistemas para hablar de la verdad.

La l gica de la verdad.indd 10 04/07/2014 13:46:43

usar un lenguaje con expresiones semánticas. Mientras hablara con otros que también posean super-poderes, podría eliminar todo uso de la verdad. En una dirección semejante, J. C. Beall (2009: 1) afirma:

> God could use only the T-free fragment of English to uniquely specify our world. We are unlike God in that respect; we need a device that enables us to overcome finite constraints in our effort to describe the world.

Los hablantes como nosotros, en cambio, necesitamos un mecanismo que nos capacite para superar nuestras limitaciones finitistas al esforzarnos cuando intentamos hablar acerca de lo que nos rodea. Este mecanismo es *la verdad*: nosotros, seres limitados expresivamente, no podríamos hablar de todo sin nuestro predicado veritativo. Así, muchas veces la introducción del predicado de verdad en un discurso recopila información para su eventual liberación. Esto es útil tanto como un mecanismo de generalización infinita:

(1) Todos los teoremas de la aritmética son verdaderos

como uno de generalización ciega:

(2) Todo lo que dijo Aristóteles es verdadero.

Sin tales generalizaciones, no tendríamos otra alternativa que enumerar una a una la información capturada por la predicación de verdad, lo cual, a diferencia de Zeus, no sería para nosotros una alternativa comunicacional apropiada. Aunque la verdad sea transparente tanto para nosotros como para Zeus, dadas nuestras capacidades expresivas, nuestros lenguajes no pueden eliminar sus expresiones semánticas. Así, nuestro predicado veritativo es un mecanismo para capturar información y para liberarla:

Captura: $\alpha \Rightarrow \mathrm{Tr}(\ulcorner\alpha\urcorner)$

y el de liberación en:

Liberación: $\mathrm{Tr}(\ulcorner\alpha\urcorner) \Rightarrow \alpha$

Cuando ⇒ es un condicional, tenemos la forma condicional de Captura y Liberación que juntas forman lo que se conoce como *bicondicionales T*. Cuando ⇒ es un martillo, tenemos sus formulaciones en términos de reglas. En este caso, el martillo indica que se trata de una inferencia válida (en algún sentido, no necesariamente clásico de validez).

La l gica de la verdad.indd 11 04/07/2014 13:46:43

Muchos filósofos y lógicos aceptan los principios de Tercer Excluido (LEM) y Bivalencia (BIV) vinculados a nuestro uso de la verdad. Ellos pueden ser comprendidos como sigue, donde ⊢ expresa validez.

LEM: ⊢ A ∨ ¬A

BIV: ⊢ Tr('A') ∨ Tr('¬A ')

Supongamos que falsedad fuera tomada como verdad de la negación de una oración. Es decir, A es falsa si su negación ¬A es verdadera. De hecho, por transparencia ambos principios son equivalentes. Esto es, por transparencia, Tr('A') y α son intersustituibles en todos los contextos no opacos para toda α. Por lo tanto, asumiendo que ni la negación, ni la disyunción generan opacidad, A ∨ ¬A implica Tr('A') ∨ ¬Tr('A'), y ¬Tr('A') implica Tr('¬A'), y por eso A ∨ ¬A implica Tr('A') ∨ Tr('¬A'). Esto es precisamente cómo funciona la transparencia. Expresada en un leguaje, la verdad transparente conduce a que la validez de LEM sea equivalente a la de BIV.

También, muchos filósofos aceptan el principio de no contradicción (PNC) aplicado a la verdad:

PNC: ⊢ ¬ (Tr('A') ∧ ¬Tr('A'))

Y explosión:

EFQ: Tr('A') ∧ ¬ Tr('A') ⊢ B

Desde un punto de vista filosófico, la tesis según la cual las afirmaciones no semánticas constituyen el único sustento para el establecimiento de las afirmaciones semánticas parece fundarse en una simple intuición. Supongamos que tenemos establecidas las condiciones de verdad de todas las oraciones del lenguaje que no contengan el predicado veritativo. ¿Qué información adicional necesitaríamos para fijar las condiciones veritativas de las oraciones que contienen al predicado veritativo? Esa simple intuición nos dice que siempre que hayamos establecido los valores de verdad de todas las oraciones que no contienen expresiones semánticas, habremos establecido, por esa simple razón, los valores de verdad de las oraciones que las contienen. Esta tesis puede clarificarse en la siguiente formulación en términos formales: según esta idea, para cualquier modelo básico de un lenguaje, esto es, una interpretación que haga verdaderas a todas las oraciones que no contengan expresiones semánticas, debería haber exactamente *una* interpretación que fije una única extensión para el predicado veritativo de ese lenguaje. Esto garantiza que la extensión del mencionado predicado *dependa* únicamente de

La l gica de la verdad.indd 12 04/07/2014 13:46:43

las oraciones que no tienen expresiones semánticas. Este principio ha sido llamado por Michael Kremer (1988: 238) *tesis de la superveniencia semántica*. Esta tesis puede recibir una lectura ontológica.[2] Así, dejando de lado las discusiones alrededor de la noción de *hecho,* la idea muchas veces puede venir acompañada de la afirmación de que los hechos semánticos (aquellos hechos expresados mediante afirmaciones semánticas del tipo 'Es verdad que A', donde 'A' puede reemplazarse por cualquier oración con contenido asertórico) quedan *completamente determinados* por los hechos no semánticos. Por supuesto, una vez que se ha dado este paso, la tentación a sacar consecuencias metafísicas adicionales de esta afirmación es inmediata: "No hay hechos semánticos". O de otra manera, el mundo que nos rodea está constituido sólo por hechos no semánticos. Esto puede tranquilizar a aquellos que tengan desconfianza en las entidades semánticas al verlas como entidades oscuras que deben ser eliminadas. Esta lectura se acerca al enfoque deflacionista respecto de la verdad.[3] La verdad no es nada: no hay ninguna propiedad que las oraciones verdaderas tengan en común. Y a diferencia de lo que se ha sostenido en muchas oportunidades, la verdad no juega un papel explicativo central: si la verdad no es nada, nada puede explicar.[4] Por supuesto, esta lectura radical de la dependencia que propone eliminar los compromisos ontológicos, al menos en el plano semántico, no es la única posible. Una lectura correspondentista de la transparencia (David, 1994) podría acentuar el papel asimétrico del vínculo entre el plano no semántico y el plano semántico: que lo no semántico *fundamente* las atribuciones de verdad simplemente quiere decir que hay una relación de fundamentación entre las aserciones y las atribuciones de verdad a esas aserciones. Es porque se da A que estamos autorizados a afirmar que A es verdadera, sin que ello signifique algo más que un recurso al uso del lenguaje. En suma, deflacionistas y correspondentistas harán una lectura filosófica contrapuesta de la transparencia, pero acordarán en que la capacidad de hablar de la verdad dentro de un lenguaje supone la posibilidad de expresar un predicado que sea transparente.

2. El término *superveniencia semántica* alude a la idea de que no puede haber diferencias en lo semántico sin diferencias en lo no semántico. Esta expresión es usual en las discusiones sobre la visión estratificada de la realidad y en la presente introducción hará referencia a la supuesta relación entre el ámbito semántico y el no semántico.

3. Ver por ejemplo Field (1994) y Horwich (1990).

4. Para una discusión extensa de este punto, ver Barrio (1998).

La l gica de la verdad.indd 13 04/07/2014 13:46:43

Sin embargo, es ampliamente conocido a partir de los trabajos de Tarski (1956) que la verdad transparente no puede ser fácilmente agregada a un lenguaje sin expresiones semánticas, al menos si la lógica subyacente es la lógica clásica. Gran parte de lo que hemos aprendido alrededor de las investigaciones semánticas, es que la verdad, aunque simple, es siempre un mecanismo de riesgo. Es fácil derivar una inconsistencia de la suposición de que hay una oración que afirma de sí misma que no es verdadera. Tradicionalmente, esta oración es conocida como la oración del mentiroso. La suposición parece estar justificada siempre que se admita un lenguaje que pretenda expresar su propia semántica. Así, sea M la oración que afirma de sí misma que no es verdadera (el mentiroso): $M \leftrightarrow \neg Tr(\text{'}M\text{'})$. Es fácil derivar cualquier cosa, aceptando algunas leyes clásicas, Captura y Liberación:

[1]	$M \leftrightarrow \neg Tr(\text{'}M\text{'})$	
[2]	$Tr(\text{'}M\text{'}) \vee \neg Tr(\text{'}M\text{'})$	LEM
[3]	$Tr(\text{'}M\text{'})$	Sup caso 1
[4]	M	Liberación de [3]
[5]	$\neg Tr(\text{'}M\text{'})$	Def. M [4]
[6]	$Tr(\text{'}M\text{'}) \wedge \neg Tr(\text{'}M\text{'})$	I $\wedge$ [3] [5]
[7]	$\neg Tr(\text{'}M\text{'})$	Sup caso 2
[8]	M	Def. M [7]
[9]	$Tr(\text{'}M\text{'})$	Captura [8]
[10]	$Tr(\text{'}M\text{'}) \wedge \neg Tr(\text{'}M\text{'})$	I $\wedge$ [7] [9]
[11]	$Tr(\text{'}M\text{'}) \wedge \neg Tr(\text{'}M\text{'})$	E v [2] [6] [10]
[12]	B	EFQ [11]

Además, también es sencillo derivar la verdad de la oración del mentiroso a partir de la lógica clásica, Captura y Liberación:

La l gica de la verdad.indd 14 07/07/2014 17:07:02

[1]	$M \leftrightarrow \neg Tr(\text{'M'})$	Diagonalización
[2]	$Tr(\text{'M'})$	Suposición, por $\neg$ I
[3]	M	[2], Liberación
[4]	$\neg Tr(\text{'M'})$	[1], [3], $\leftrightarrow$ E
[5]	$Tr(\text{'M'}) \wedge \neg Tr(\text{'M'})$	[2], [4], $\wedge$ I
[6]	$\neg Tr(\text{'M'})$	[2-5] $\neg$ I
[7]	M	[1], [6] $\leftrightarrow$ E
[8]	$Tr(\text{'M'})$	[7], Captura.

Clasificar al mentiroso como verdadera, muestra los riesgos de representar un predicado de verdad transparente dentro de un lenguaje. Esos riesgos parecen incrementarse cuando, con la intención de clasificar correctamente las afirmaciones problemáticas respecto de sus valores de verdad, nos vemos obligados a incorporar otras nociones semánticas. El problema de las venganzas surge cuando se desea clasificar la oración del mentiroso. Consideremos una vez más la oración del mentiroso. Clasificarla como verdadera conduce a una inconsistencia. Liberación provoca que la oración del mentiroso también es no verdadera. Al mismo tiempo, clasificar la oración del mentiroso como no verdadera implica una inconsistencia: Captura conduce a que la oración del mentiroso sea también verdadera. ¿Cómo clasificar la oración del mentiroso de acuerdo con su valor veritativo sin perder la consistencia? Una sugerencia natural sería clasificarla ni como verdadera ni falsa. El problema con esta opción, incluso dejando a un lado la cuestión de cómo interpretar la negación, es la conexión entre *ser ni verdadera ni falsa* y *ser no verdadera*. En particular, tenemos:

NTF–NT. $\neg Tr(\text{'A'}) \wedge \neg Tr(\text{'}\neg A\text{'}) \Rightarrow \neg Tr(A)$

Pero, nuevamente, $\Rightarrow$ puede ser un condicional o un martillo de deducción. De cualquier manera, los problemas surgen inevitablemente:

Asumamos que M es ni verdadera ni falsa. Por NTF–NT inmediatamente se obtiene que M es no verdadera. Pero ahora volvemos a obtener una inconsistencia. Por Captura, M es también verdadera. Por eso, aunque natural, la sugestión de que M no es ni verdadera ni falsa reintroduce la inconsistencia.

La l gica de la verdad.indd 15 04/07/2014 13:46:54

Al admitir nuevas categorías en nuestra clasificación semántica de las oraciones, siempre estaremos tentados a separar aquellas oraciones que poseen un comportamiento "normal" y pueden por lo tanto ser clasificadas o bien como verdaderas o bien como falsas y aquellas que como el mentiroso tienen un comportamiento "anormal". Llamemos *patológicas* a estas oraciones. Ahora bien, la noción de *patologicidad* debería poder ser expresada en nuestro lenguaje. Pero esta simple suposición conduce a una nueva revancha a partir de la oración:

R: R es falsa o patológica.

Asumamos que R es verdadera. Entonces, por liberación R es falsa o patológica. Pero, entonces R es falsa y verdadera o patológica y verdadera. Pero, ninguna oración puede a la vez ser falsa y verdadera o patológica y verdadera. Asumamos que R es falsa. Entonces, por liberación R no es ni falsa ni patológica. De lo que se sigue que R debería ser verdadera, lo cual es absurdo. Asumamos que R es patológica. Entonces, R es falsa o patológica. Pero, R dice que R es falsa o patológica. Entonces, R es verdadera. De lo que se sigue que ella es verdadera y patológica. Lo cual también es absurdo. Por eso, aunque natural, la sugestión de que R es patológica reintroduce la inconsistencia.

El fenómeno de la venganza fácilmente se multiplica. Cada vez que se intenta clasificar semánticamente la oración del mentiroso, surge de inmediato otra revancha: la que involucra a la oración que dice de sí misma que es no verdadera y tal y tal (en nuestro ejemplo, ni falsa). La oración del mentiroso nos fuerza a elegir entre limitar nuestros recursos expresivos o inconsistentemente tratar de expresarlos.

Podría pensarse que, al menos en parte, estos problemas están emparentados con la negación. Sin embargo, si (i) nuestro predicado veritativo es transparente, (ii) nuestro condicional satisface la regla de inferencia de Modus Ponens y (ii) ese condicional también valida el axioma de contracción $((A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B))$, entonces también podemos probar una oración A que diga cualquier cosa (incluyendo, $\bot$). Sea 'C' la oración de Curry. Esto es

Curry $\quad C \leftrightarrow (Tr(\text{'}C\text{'}) \supset A)$

Entonces

La l gica de la verdad.indd 16 04/07/2014 13:46:57

[1]	$C \supset (Tr(\text{`}C\text{'}) \supset A)$	Diagonalización
[2]	$C \supset (C \supset A)$	[1], Transparencia de la verdad
[3]	$(C \supset (C \supset A)) \supset (C \supset A)$	Contracción
[4]	$(C \supset A)$	[2], [3], Modus Ponens
[5]	$(Tr(\text{`}C\text{'})) \supset A)$	[4], Transparencia de la verdad
[6]	C	[5] Diagonalización
[7]	A	[4], [6] Modus Ponens.

Por lo tanto, lo que muestra la anterior demostración es que no podemos consistentemente tener ambos:

(a) Un predicado de verdad transparente.

(b) Un condicional que uniformemente satisfaga todos los axiomas y reglas de inferencia que de manera estándar aceptamos para un condicional razonable.

Principios básicos de los condicionales como Modus Ponens y Contracción parecen no funcionar en contextos donde el predicado veritativo es usado transparentemente.

Todos estos problemas han conducido a adoptar diversas estrategias. Una opción es adoptar algún tipo de *quietismo:* esto es, convivir con la existencia de paradojas y abandonar nuestra búsqueda de clasificar mentirosos. Hay mentirosos en el lenguaje, pero no hay una categoría semántica que pueda ser expresada sin generar nuevos problemas, en la cual los mentirosos puedan clasificarse. Otra opción incluso es más radical: limitar aún más la expresibilidad abandonando transparencia, adoptando algún tipo de solución (*¿ad hoc?*) por medio de evitar los mentirosos. Dos tesis están vinculadas a estas opciones:

Inexpresabilidad Radical: Algunas expresiones semánticas, como verdad, no son expresables consistentemente dentro del mismo lenguaje (esto es compatible con la posibilidad de que puedan ser expresadas desde otro lenguaje).

Inexpresabilidad Moderada: Algunas expresiones semánticas, que necesitamos introducir en nuestro lenguaje para expresar adecuadamente ciertos rasgos del predicado veritativo de un lenguaje, no son expresables consistentemente dentro del mismo lenguaje (esto es compatible con la posibilidad de que puedan ser expresadas desde otro lenguaje).

La l gica de la verdad.indd 17 04/07/2014 13:46:59

Inexpresabilidad radical implica inexpresabilidad moderada, pero no a la inversa. Martin (Martin, R.: 1984), ha sugerido que el enfoque tarskiano se inscribe en la tesis de la inexpresabilidad radical. Esta idea incluso podría interpretarse como la tesis según la cual nuestro concepto intuitivo de verdad, que se comporta transparentemente, es inconsistente. En esta línea, Ecklund (2002) ha sido uno de los que se ha planteado más firmemente esta opción. Otra opción sería interpretar que el concepto intuitivo de verdad posee una extensión que se extiende indefinidamente. Esta opción parece funcionar mejor con la tesis moderada: siempre será posible expresar en algún lenguaje la extensión de un predicado de verdad. Esta opción es favorecida por Cook (2007). Más allá de qué decir frente al concepto intuitivo de verdad, lo que es cierto es que la propuesta de Tarski bloquea la trivialización tanto en el caso del mentiroso y sus reforzados como en el de Curry, limitando la capacidad expresiva del lenguaje. Esto es, en las derivaciones formales se bloquean los primeros pasos de las pruebas.

La tesis de la inexpresabilidad moderada parece estar presente en alguna medida en los trabajos de Kripke (1975) y de Gupta y Belnap (1993). Finalmente, otra alternativa para tratar los fenómenos vinculados a las paradojas semánticas y sus revanchas es salvar la transparencia revisando la lógica. Así, la propuesta intentaría lograr consistentemente un lenguaje semánticamente autosuficiente:

Autosuficiencia-Semántica: Todas las expresiones semánticas (que sean necesarias para describir el comportamiento del predicado veritativo de un lenguaje) son expresables en ese lenguaje.

La tesis de la autosuficiencia semántica es el eje central de las teorías de Field (2008), Priest (1984; 2006) y Beall (2009). Un lenguaje es semánticamente autosuficiente si tiene la capacidad de formular una teoría completamente expresable en ese lenguaje que brinde una descripción semántica completa de todas sus oraciones. Todos estos enfoques, en alguna medida, se han propuesto modificar la lógica para lograr autosuficiencia semántica.[5] A fin y al cabo, el Teorema de Tarski que afecta la posibilidad de desarrollar lenguajes semánticamente autosuficientes usa la lógica clásica como lógica subyacente. El desafío

5. Nótese que no basta, para que un lenguaje sea semánticamente autosuficiente, que posea su propio predicado de verdad. Usualmente, se llama semánticamente cerrado a este tipo de lenguajes. Esto es así ya que Gupta mostró que un lenguaje puede poseer su propio predicado veritativo sin ser semánticamente cerrado, si su capacidad de representar su sintaxis se restringe.

La l gica de la verdad.indd 18 04/07/2014 13:46:59

es elaborar una lógica de la verdad que permita representar sin trivialidad un lenguaje semánticamente autosuficiente.

El objetivo principal de este libro es analizar si las paradojas semánticas pueden ser resueltas vía revisión de la lógica. Exploraremos diversas revisiones de la lógica fundamentalmente respecto del tratamiento de la negación y del condicional, tal como es usual en los enfoques paracompletos y paraconsistentes, intentando evaluar en qué medida puede lograrse el añorado objetivo de la auto-suficiencia semántica. La estructura del libro es la siguiente: el capítulo 1, escrito por mí, describe las definiciones tarskianas de la verdad. Un modo natural de expresar la transparencia de la verdad es por medio de un condicional material. Es decir, expresar transparencia de la verdad en términos de la totalidad de bicondicionales T del lenguaje. La propuesta tarskiana intenta resolver las paradojas semánticas sin abandonar la lógica clásica. Esta respuesta natural conduce a la idea de que los lenguajes suficientemente expresivos deben carecer de su propio predicado de verdad. Es decir, las paradojas semánticas nos obligan a abandonar el proyecto de desarrollar lenguajes semánticamente autosuficientes. Así, Tarski propone expresar el predicado veritativo para un lenguaje desde un lenguaje expandido. Por ejemplo, se comienza con un lenguaje que carezca del predicado de verdad. Luego, se expande ese lenguaje con un predicado que se aplique a las oraciones verdaderas del lenguaje de partida. Con esta restricción, no es difícil mostrar cómo el nuevo predicado cumple Captura y Liberación para las oraciones del lenguaje inicial. Si se quisiera describir la semántica del lenguaje ampliado, el procedimiento se reiteraría: deberíamos volver a ampliar el lenguaje con un nuevo predicado que se aplique sólo a las oraciones verdaderas de la ampliación de la etapa anterior. El proceso continúa indefinidamente. Claro que no hay ninguna oración del mentiroso en toda la jerarquía completa: la restricción según la cual ningún predicado veritativo puede aplicarse a las oraciones de su propio lenguaje lo impide.

El capítulo 2, escrito por Damian Szmuc y Paula Taijeiro, presenta la teoría de puntos fijos de Kripke. En tal enfoque, la idea es eliminar por completo la jerarquía de lenguajes, modificando la lógica. Particularmente, abandonando la ley LEM. Los enfoques paracompletos aceptan vacíos de valores de verdad [*gaps*]. Esto es, el punto principal es que tales enfoques rechazan tanto el mentiroso como su negación: rechazan tanto M como ¬ M. La idea de *fundamentación* juega un papel central en la semántica de puntos fijos. Claros ejemplos de oraciones cuyas condiciones de verdad resultan estar fundadas son aquellas que carezcan

La l gica de la verdad.indd 19 04/07/2014 13:47:00

de expresiones semánticas. Así, se comienza por un modelo que permita fijar la extensión de un predicado veritativo para ese "recorte" inicial del lenguaje cuyas oraciones resulten fundadas. La anti-extensión de este predicado estará compuesta por aquellas oraciones que resulten infundadas. Nótese que si el lenguaje contiene expresiones semánticas, es fácil advertir que la construcción no tendrá por qué dividir el conjunto de las oraciones del lenguaje de forma exhaustiva entre la extensión y la anti-extensión del predicado de verdad. El paso siguiente consiste en "ampliar" la extensión y la anti-extensión del predicado veritativo a partir de los resultados obtenidos en el modelo anterior. Este "proceso" de sucesivas etapas deberá reiterarse indefinidamente. Un punto fijo es una instancia en la cual la reiteración del proceso no conduce a ningún cambio. Kripke considera que verdad debe definirse como punto fijo. Nótese que oraciones como las del mentiroso, que, a diferencia de lo que sucede en el enfoque tarskiano, son perfectamente posibles en el lenguaje, no estarán ni en la extensión ni en la antiextensión del predicado veritativo. Esto es, intuitivamente carecerán de valores de verdad. Sin embargo, lógicas como las de este enfoque carecen de un condicional "natural" (en particular, uno que satisfaga $A, A \supset B \vdash B$). Esto muestra una limitación del enfoque kripkeano para tratar las paradojas semánticas. En particular, tal enfoque no puede expresar las propiedades de Captura y Liberación por medio de su forma condicional. (i.e., bicondicionales-T): *Tr* es transparente en este enfoque y por eso, $Tr('A')$ y A son completamente intersubstituibles. Y ya, para toda A que no vale $\neg A \vee A$ (no vale LEM), tenemos que no vale $\neg Tr('A') \vee A$. Pero $\neg Tr('A') \vee A$ es equivalente a $Tr('A') \supset A$ en la teoría, ya que (en el enfoque de puntos fijos) $\rightarrow$ es simplemente el condicional. Esto significa que la construcción kripkeana falla en expresar todos los bicondicionales-T, un candidato natural para expresar en la teoría Captura y Liberación como características de la verdad en un lenguaje semánticamente autosuficiente. Además, algunas versiones paracompletas, tales como la lógica de Kleene Fuerte, el condicional material no cumple el teorema de la deducción. Esto produce consecuencias desconcertantes: por ejemplo, vale $A \vdash A$, pero no vale $\vdash A \supset A$.

El capítulo 3, escrito por Natalia Buacar y Lavinia Picollo, analiza la teoría de la revisión del predicado de verdad. Del mismo modo que la teoría de la verdad como punto fijo, se propone dar una explicación del concepto de *verdad transparente*. Tal explicación no limita ningún recurso a la auto-referencialidad, con el propósito de desarrollar lenguajes semánticamente autosuficientes. Al igual que el enfoque kripkeano, se propone hacerlo evitando todo tipo de jerarquías. Sin

La l gica de la verdad.indd 20 04/07/2014 13:47:00

embargo, en contraste con el mencionado enfoque kripkeano que abandona **LEM** y la bivalencia, la teoría de Gupta y Belnap permite auto-referencia manteniendo la clasicidad de la lógica. La clave será expresar transparencia, no adoptando un bicondicional clásico, sino desarrollando una teoría de las definiciones circulares. La idea crucial es que el uso del predicado veritativo debe ser explicado por medio de una regla de revisión: una que fije la extensión del predicado veritativo a través de un proceso gradual de asignaciones de extensiones hipotéticas. El proceso de revisión resulta crucial en presencia de oraciones infundadas como las del mentiroso o de Curry, donde su conducta patológica será explicada por medio de una conducta fluctuante en las distintas etapas de revisión. Las oraciones patológicas no se estabilizan nunca. No obstante, fenómenos vinculados a la omega-inconsistencia y a la política de *bootstrapping (qué* valor semántico asignar a las oraciones patológicas en los ordinales límite) plantean dudas sobre el proyecto.

El capítulo 4, elaborado por Federico Pailos y Lucas Rosenblatt, presenta la teoría paracompleta de Field. Al igual que el enfoque de puntos fijos, la propuesta diagnostica que los problemas surgen alrededor de **LEM**. La propuesta de Field es revisar la lógica de la verdad abandonando en aquellos contextos en los cuales aparece el predicado de verdad el mencionado principio clásico. De esta manera, el desafío consiste en elaborar una lógica del condicional que permita expresar la tesis de la transparencia, sin que este condicional deje de ser razonable (esto es, no cumpla identidad y Modus Ponens). Esta teoría incorpora a la vez las técnicas kripkeanas de la verdad como punto fijo y la idea de Gupta y Belnap de trabajar con secuencias de revisión. Aunque, en el caso de Field, las secuencias de revisión son incorporadas para desarrollar las condiciones veritativas de un condicional capaz de expresar la verdad transparente. Field sostiene que su teoría carece de venganzas y como tal cumple con la tesis de autosuficiencia semántica. Sin embargo, surgen subproductos no deseados en la propuesta: la falla de LEM afecta las opciones para expresar los bicondicionales-**T**. En particular, el nuevo condicional no satisface $\vdash A \supset A$, lo cual dado su cumplimiento de Modus Ponens junto con la transparencia, produce la mencionada limitación. Hay, además, dificultades vinculadas a la razonabilidad del condicional, ya que hay numerosas intuiciones acerca de las leyes que deberían satisfacerse que no se cumplen. Por otra parte, hay dificultades vinculadas a la capacidad de expresar cuantificaciones restrictas. El punto es importante no sólo por la necesidad inmanente de expresar tales cuantificaciones, sino por la necesidad de abandonar la idea de que validez

La l gica de la verdad.indd 21 04/07/2014 13:47:00

es transmisión de verdad. Esto podría tener como consecuencia un límite a la autosuficiencia semántica, vinculada a la noción de valor designado en el modelo.

Finalmente, el capítulo 5, escrito por Diego Tajer, estudia los enfoques paraconsistentes. Priest (1984; 2006) y Beall (2009) han defendido la idea de adherir a un enfoque paraconsistente para resolver las paradojas semánticas sin abandonar el proyecto de la autosuficiencia semántica. En el caso de Priest, este autor propuso adoptar la *lógica LP* (Lógica de las paradojas), en la cual se retiene LEM, pero se abandona EFQ. LP tiene como característica distintiva el permitir las contradicciones verdaderas. Esto es lo que se conoce como Dialetheías. Formalmente, LP es una lógica trivalente, pero que a diferencia de la lógica adoptada por los enfoques paracompletos con vacíos de valores veritativos, tiene superposiciones de valores de verdad [gluts]: esto es, oraciones que son verdaderas y falsas. Al igual que lo que sucede en los enfoques paracompletos, los modelos de LP pueden verse como una búsqueda de una extensión para el predicado de verdad a partir de un modelo inicial. Sin embargo, en los enfoques paracompletos la construcción del modelo permite obtener una la extensión y una anti-extensión no exhaustiva pero disyuntiva. En el caso de los modelos paraconsistentes, se permite la *superposición* de valores de verdad. Es decir, el punto principal es que tales enfoques aceptan tanto el mentiroso como su negación: aceptan tanto M como ¬ M. La propuesta de Beall es incluso más simple: las dialetheias están confinadas al discurso semántico, producto de la transparencia. Son productos no queridos [*spandrels*] de la autosuficiencia semántica. En ambas propuestas el resultado es que la interpretación siempre asigne los mismos valores a A y Tr('A') en el modelo, lo que permite a los paraconsistentes defender la idea de que la verdad es completamente transparente. No obstante, quedan dudas acerca de la negación (en particular, sobre su presunta naturaleza exhaustiva). Además, la razonabilidad del nuevo condicional parece dudosa, ya que si bien vale identidad, no vale el Modus Ponens. Muchas veces se ha enfatizado que LP es el dual de Kleene Fuerte. En este caso, no vale la otra dirección del teorema de la deducción. Por ese motivo, no vale Modus Ponens $A \wedge (A \supset B) \vdash B$, aunque se cumpla seudo Modus Ponens: $\vdash A \wedge (A \supset B) \supset B$. Por último, tampoco, este enfoque es muy exitoso a la hora de expresar expresar cuantificaciones restrictas.

Este libro reúne parte de las investigaciones del Grupo de Lógica de Buenos Aires dirigido por mi. Los temas que aquí se presentan constituyen parte del núcleo central de nuestro trabajo. Durante la elaboración del material diversas instituciones han apoyado nuestra tarea: el Conicet, la Universidad de Buenos

La l gica de la verdad.indd 22 04/07/2014 13:47:00

Aires, SADAF. MIT, la Universidad de Oxford, la British Academy, el Munich Center for Mathematical Philosophy (MCMP) y la DAAD. Queremos agradecer todos los recursos recibidos sin los cuales este trabajo no existiría. Por otra parte, diversas personas han colaborado directa o indirectamente en la elaboración de nuestro trabajo. Queremos agradecer a Roy Cook, Mario Gómez Torrente, Saul Kripke, Volker Halbach, Hannes Leitgeb, Øystein Linnebo, vann McGee, Graham Priest y Agustín Rayo. Finalmente, también deseamos agradecer a la Editorial EUDEBA, en particular a Luis Quevedo, por su confianza y apoyo para llevar adelante este proyecto.

Bibliografía

Barrio, E. (1998): *La Verdad Desestructurada*. Buenos Aires, Eudeba.

Beall, J. C. (ed.) (2007): *Revenge of the Liar: New Essays on the Paradox*. Oxford, Oxford University Press.

— (2009) *Spandrels of Truth*, Oxford, Oxford University Press.

Cook, R. (2007): "Embracing Revenge: on the Indefinite Extendibility of Language", en Beall, J. C., *Revenge of the Liar: New Essays on the Paradox*. Oxford, Oxford University Press.

David, D. (1994): *Correspondence and disquotation*, Nueva York, Oxford University Press.

Eklund, M. (2002): "Inconsistent Languages", en *Philosophy and Phenomenological Research*, 64.

Field, H., (1994): "Deflationist views of meaning and content", en *Mind*, CIII.

— (2008): *Saving Truth from Paradox*. Oxford, Oxford University Press.

Gupta, A. y Belnap, N. (1993): *The Revision Theory of Truth*. Cambridge, MIT Press.

Horwich, P. (1990): *Truth*, Cambridge, Basil Blackwell.

Kremer, M. (1988): "Kripke and the Logic of Truth"*, en J. Of Phil. Logic*, 17.

Kripke, S. (1975): "Outline of a theory of truth", en *Journal of Philosophy*, 72.

Martin, R. (1984), Recent Essays on Truth and the Liar Paradox, Clarendon Press, Oxford

La l gica de la verdad.indd 23 04/07/2014 13:47:00

Priest, G. (1984): "Logic of paradox revisited", en *Journal of Philosophical Logic*, 13.
— (2006): *In Contradiction*. Oxford, Oxford University Press.
Tarski, A. (1956): *Logic, Semantics, Metamathematics*. Oxford, Oxford University Press.

La l gica de la verdad.indd 24 04/07/2014 13:47:00

Capítulo 1
Definiciones tarskianas de la verdad

Eduardo Alejandro Barrio

En este capítulo, presento el método tarskiano para dar una definición de *verdad*. Describo la estructura de la definición, ejemplificada en la aplicación del mencionado método, aplicado al lenguaje del cálculo de clases (LCC). Básicamente, la propuesta de Tarski reconstruye la transparencia del predicado veritativo adoptando un condicional clásico. Como resultado, el esquema T adquiere un papel central. A continuación, muestro cómo dar una *definición explícita* del predicado veritativo de ese lenguaje desde un metalenguaje que carezca de nociones semánticas primitivas. En el paso siguiente, expongo la noción tarskiana de verdad relativa a un *modelo*. Presento distintos tipos de modelo para lenguajes de primer orden (LPO) y segundo orden (LSO), analizando la discusión en torno a las definiciones de verdad con y sin dominios. Luego, describo el principal resultado probado por Tarski: su famoso *Teorema de la Indefinibilidad de la Verdad*. Tal teorema impide, al menos bajo ciertas condiciones, tener un lenguaje semánticamente auto-suficiente. Finalmente, en un apéndice, presento una axiomatización (T(PA)) del enfoque tarskiano de verdad que permite, entre otras cosas, ver cómo caracterizar el predicado veritativo de la aritmética de primer orden.

La l gica de la verdad.indd 25 04/07/2014 13:47:00

1. Verdad y consecuencias

Los esfuerzos por determinar las condiciones necesarias y suficientes para que una oración sea una consecuencia lógica de otras colocan al concepto de *verdad* en un lugar central. Informalmente, si un argumento es válido, si son verdaderas sus premisas, *transmiten su verdad* a su conclusión. Consideremos el siguiente argumento que intuitivamente cumple tal condición:

P1: O los seres humanos somos libres o nuestras acciones intencionales están determinadas causalmente.

P2: Hay acciones intencionales

P3: Si hay acciones intencionales, nuestras acciones no están causalmente determinadas.

Por lo tanto,

C: los seres humanos somos libres.

cuya forma lógica usualmente es representada como sigue:

P1: $A \vee B$.

P2: C

P3: $C \supset \neg B$.

Por lo tanto,

C: A.

El propósito de la lógica es brindar una explicación sistemática y precisa acerca de la relación de *consecuencia lógica*, una que, al menos hasta cierto punto, respete nuestras intuiciones acerca de la validez intuitiva de argumentos como el anterior. En esta dirección, J. C. Beall y Greg Restall (2000: 1) sostienen:

> The chief aim of logic is to account for consequence — to say, accurately and systematically, what consequence amounts to, which is normally done by specifying

La l gica de la verdad.indd 26 04/07/2014 13:47:00

which arguments (in a given language) are valid.

En la búsqueda de esa explicación, la idea que parece ser central es la siguiente:

(V) A conclusion A follows from premises Σ if and only if any case in which each premise in Σ is true is also a case in which A is true. Or equivalently, there is no *case* in which each premise in Σ is true, but in which A fails to be true.

Sin embargo, de acuerdo con Beall y Restall, (V) no nos da una caracterización completa de la noción de *consecuencia,* ya que deja abierta la cuestión de *qué* son los casos. Por ejemplo, cuando los casos se circunscriben a mundos posibles, la noción de *consecuencia* que se determina es la clásica. Pero, cuando nos desplazamos de mundos a situaciones, dejando indeterminada parte de la información, el resultado es que A ∨ ¬ A no vale en toda situación, ya que hay circunstancias en donde ni A ni ¬ A son verdaderas. La expansión del dominio de casos a situaciones inconsistentes brinda "casos adicionales" donde una inferencia podría ser clásicamente válida, pero inválida relevantemente. La más notoria es la que va de A ∨ B y ¬A a B, esto es, el silogismo disyuntivo. Esto abre la posibilidad de adoptar una tesis pluralista acerca de la noción de *consecuencia.* Así, cuando una especificación de los casos es suplementada con una apropiada definición de *verdad en un caso* (modelo, mundo posible, situación consistente o inconsistente, construcción), el resultado es una lógica. La tesis pluralista sostiene que diversas especificaciones de la noción de *caso* pueden ser correctas. Un monista lógico, en cambio, sostiene que sólo una especificación puede ser correcta.

Ahora bien, en ambas opciones, una teoría lógica se ocupa de explicar cómo se transmite la verdad, desde ciertas oraciones a otras evaluadas en un conjunto de casos, de manera tal de obtener vínculos lógicos entre las mismas. En el ejemplo anterior, dada la forma de ese argumento, en mundos posibles (o situaciones completas) en los cuales las premisas 1, 2 y 3 resulten verdaderas, la conclusión no puede no serlo en esos casos.[6] Por eso, el concepto de *verdad* juega un papel importante en lógica. Comprender qué es la verdad es una parte central en el proyecto de explicar lo que se preserva en los casos de consecuencia lógica.[7]

6. Nótese que una interpretación relevante de la noción de *consecuencia* afectaría la validez de nuestro ejemplo.

7. Por supuesto, *transmisión de verdad* no es la única explicación de la noción de *consecuencia lógica*. A grandes rasgos, podríamos decir que hay una amplia perspectiva inferencialista que

La l gica de la verdad.indd 27 04/07/2014 13:47:01

2. Presentación intuitiva

Uno de los artículos más influyentes de la lógica contemporánea es "The Concept of Truth in Formalized Languages", publicado por Alfred Tarski en 1933.[8] El impacto entre los lógicos, matemáticos y filósofos preocupados por estos temas es aún difícil de medir. Su objetivo principal fue dar una caracterización extensional de la concepción clásica de *verdad* (emparentada con Aristóteles) en términos de otros conceptos mejor comprendidos suministrados por la lógica y la matemática. Entre estos conceptos precisos se encontraban los de *secuencia de objetos* (entendida en términos conjuntistas), *función* y *satisfacción*. Al usar este aparato de las mencionadas disciplinas formales esperaba obtener una mejor comprensión del predicado veritativo y sobre todo, evitar el riesgo de incurrir en indeseables inconsistencias. De hecho, como veremos, Tarski no ofreció una definición general, sino un método sistemático para obtener definiciones de verdad para una colección considerable de lenguajes formales. Su contribución ha sido uno de los logros más importantes dentro de la lógica. El método fue formal, ofreciendo una detallada, precisa y rigurosa técnica para desarrollar definiciones de verdad. Al hacerlo, abrió un amplio espectro de nuevos problemas filosóficos que derivaron en nuevos enfoques acerca de la verdad.[9]

Como hemos visto, el concepto de *verdad* juega un papel central en la caracterización del concepto de *consecuencia lógica*. Pero, además, cumple un rol esencial en metalógica, especialmente en la propiedad de completitud y compacidad de las teorías de primer orden, y en el conocido resultado de incompletitud de la aritmé-

---

vincula la mencionada noción con la de sistema de prueba. Hay incluso diversas alternativas al interior de este enfoque: las presentaciones axiomáticas y el cálculo de secuentes son las dos más difundidas. El núcleo de ambos planteos, aun con sus diferencias, es el intento de explicar la noción de *consecuencia* por medio de los rasgos formales presentes en las pruebas. Recientemente, Restall ha sostenido una interpretación original donde los secuentes son vistos como brindando restricciones normativas sobre los actos de aserción y rechazo: una derivación del secuente $X \vdash Y$ hace explícito nuestro compromiso con la idea de que una afirmación conjunta de todos los miembros de X y el rechazo de cada miembros de Y (si hubiera más de uno) está fuera de lugar [out of bound]. Por supuesto, no hay aquí un recurso a la noción de *transmisión de verdad* como garantía de la noción de *consecuencia*.

8. Traducido al inglés como Tarski, A. (1935) "The Concept of Truth in Formalized Languages", en Tarski (1956).

9. Además del ya citado Tarski, A. (1935), la serie se completa con Tarski (1944).

La l gica de la verdad.indd 28 04/07/2014 13:47:01

tica probado por Gödel en 1931. Parte del propósito de Tarski fue mostrar que el concepto de *verdad* puede ser usado en metalógica de una manera consistente.

Tarski circunscribe la cuestión de dar una definición de *verdad* a la de dar una definición de ese predicado para un lenguaje específico. Y esto, debería hacerse, desde un lenguaje con suficientes recursos para hacerlo. Esto es, dado un lenguaje L, la definición de verdad en L debe ser formulada en un metalenguaje ML. Para definir *verdad en L*, se introduce en el metalenguaje un predicado monádico sin interpretar Tr, y se lo define como el predicado veritativo de L, esto es, como un predicado que es satisfecho por y sólo por las oraciones verdaderas de L. La definición debe cumplir dos condiciones: deben ser *formalmente correctas* y *materialmente adecuadas*.

El primero de los requisitos significa que la definición de tal predicado debe formularse a través de una oración de la forma:

Para todo x, Tr(x) si y sólo si φ(x)

en la cual 'Tr' nunca ocurre en 'φ'. Si 'Tr' ocurriera en la parte derecha del bicondicional debería poder formularse una oración equivalente en la cual el mencionado predicado no ocurra. Tal equivalencia debe ser probable usando los axiomas del metalenguaje que no contengan a 'Tr'. Esto es, el primero de los requisitos nos pide que seamos capaces de dar una definición explícita de los conceptos definidos. Sin lugar a dudas, la idea es evitar usar conceptos semánticos para definir conceptos semánticos.[10] Tal tipo de definiciones permiten eliminar la clase de conceptos definidos a favor de otros con precisas condiciones de aplicación.

El segundo de los requisitos tiene que ver con la *corrección extensional*. Hay un gran número de formulas que, bajo cierta interpretación habitual, sabemos que son verdaderas, y como tales, deberían formar parte de la extensión de la verdad. También hay una cantidad que sabemos que no son verdaderas. Además, hay una importante cantidad frente a las que no tenemos idea si son parte de

10. La eliminación de los términos semánticos está motivada en la desconfianza tarskiana en las nociones semánticas en general producto de las paradojas semánticas. Recuérdese que el programa tarskiano propone dar una explicación en términos lógico matemáticos de las nociones semánticas.

La l gica de la verdad.indd 29 04/07/2014 13:47:01

esa extensión o no. Una definición adecuada de verdad debería acomodar todos estos datos, no sólo clasificando como verdaderas todas aquellas fórmulas que, interpretadas de manera estándar, sabemos que lo son, sino completando esta extensión incluso con aquellas frente a las cuales admitimos nuestra ignorancia.

Dado un L, la cuestión general es entonces mostrar cómo caracterizar un predicado *Tr* de ese lenguaje desde un ML que intuitivamente sea coextensivo con el predicado veritativo para las oraciones del lenguaje original. Para resolver este problema, debemos estar con condiciones de apelar al uso mismo de los predicados de verdad. El desafío remite su forma de entender la transparencia del predicado veritativo: la convención T. Tal consideración se apoya seguramente en la intuición de Ramsey (1991) según la cual hay una íntima conexión entre las oraciones

(i) 2 es el primer número primo.

y

(ii) Es verdad que 2 es el primer número primo.

Esta íntima conexión debe considerarse un dato básico sobre la verdad. Es imposible afirmar la primera y rechazar la segunda sin caer en una contradicción explícita: que no es verdad que 2 es el primer número primo y que 2 es el primer número primo. Reconociendo entonces que ambas oraciones resultan ser al menos materialmente equivalentes,[11] la convención T establece que una definición de *Tr* es una definición adecuada de verdad si y sólo implica en ML todas las oraciones que se obtienen a partir de la expresión

(T) $\mathrm{Tr}(\text{‘A’}) \leftrightarrow \mathrm{A}$

en donde ‘A’ es el nombre en ML de una oración de L y A es la traducción de aquella oración en ML.[12] Este requisito garantiza que se cumpla el mencionado objetivo tarskiano según el cual el predicado veritativo definido debe tener una

11. En el planteo de Tarski, la transparencia de la verdad debe ser entendida materialmente, ya que mediante su definición se pretende fijar la extensión del predicado veritativo. Lo que se busca es ofrecer una expresión, para cada una de las posibles oraciones atributivas de verdad, que sea extensionalmente equivalente a dicha oración.

12. Debe aclararse que “implica” no significa estrictamente implicación lógica, ya que pueden emplearse recursos matemáticos para derivar las oraciones-T.

La l gica de la verdad.indd 30 04/07/2014 13:47:01

extensión correcta, es decir, que se aplique al menos a todas las oraciones verdaderas del lenguaje.

Tal es la íntima conexión entre los predicados veritativos y la convención T que Tarski llama a sus instancias *definiciones parciales de verdad*, y frecuentemente describe su proyecto como brindando una definición equivalente a la conjunción de todas las instancias de (T) para el lenguaje correspondiente:

> (...) toda equivalencia de la forma (T) (...) puede considerarse una definición parcial de verdad que explica en qué consiste la verdad de una frase individual. La definición general debe ser, en cierto sentido, una conjunción lógica de todas estas definiciones parciales (Tarski, 1962: 5).

Un punto importante que es necesario destacar es que los lenguajes expresivamente interesantes tienen la capacidad de generar un número potencialmente infinito de oraciones. Por eso, la sistematicidad de la definición de sus predicados veritativos sugiere la posibilidad de brindar una definición recursiva de los mismos. La idea será definir el valor de verdad de las expresiones compuestas a partir del valor de verdad de las oraciones simples. Nótese, sin embargo, que la utilización de técnicas recursivas no debería ser un obstáculo para el cumplimiento del requisito de adecuación formal: ya que la corrección formal de la definición del predicado veritativo de un lenguaje nos obliga a no adoptar conceptos semánticos primitivos, en estos casos, tendrá que ser posible mostrar cómo definir el mencionado predicado sin la utilización de conceptos semánticos. Esto es, se espera que siempre sea posible ofrecer una definición explícita de los conceptos semánticos. Las definiciones recursivas no son formalmente adecuadas, ya que usan nociones semánticas como parte de sus instrumentos. Por eso, podrán usarse siempre que exista un procedimiento que permita transformar esa definición en una definición explícita (Tarski, 1935: 193).

Hay un obstáculo, sin embargo, que se presenta en este punto. Como observa Tarski (1935: 189):

> en general las oraciones compuestas no son de ningún modo compuestos de oraciones simples. (…) En vista de este hecho, no puede darse ningún método que nos permita definir directamente por medios recursivos el concepto requerido.

Para los conocidos lenguajes de primer orden hace falta dar un rodeo para dar una definición de *verdad* aplicando el método de Tarski. Cuando se tiene como

La l gica de la verdad.indd 31 04/07/2014 13:47:01

parte de los recursos expresivos del lenguaje la cuantificación, la definición no puede operar directamente caracterizando la verdad de las oraciones complejas en términos de la verdad de las oraciones simples, ya que los constituyentes de las oraciones complejas no son necesariamente oraciones.

Por medio del concepto de *satisfacción*, Tarski logró saltar este obstáculo. Intuitivamente, fórmulas abiertas como 'x_1 es un número natural mayor que x_2' son satisfacibles por determinadas secuencias de objetos y no lo son por otras.[13] Así, la secuencia de números naturales <3,4> la satisface, mientras que <4,3> no lo hace. Las fórmulas abiertas, esto es, fórmulas de un lenguaje formal cuyas variables no están ligadas por ningún cuantificador, pueden ser satisfechas por algunas secuencias de objetos y no serlo por otras. Tarski muestra cómo tal procedimiento permite asignar valores semánticos a las partes de, por ejemplo, una fórmula cerrada como 'hay un x_1, y hay un x_2, tal que x_1 es un número natural mayor que x_2' permitiendo analizar las condiciones veritativas de la misma como dependiendo de que la formula abierta 'x es un número natural mayor que y' sea satisfecha por secuencias de objetos.

En suma, hemos visto que Tarski propone como definición del concepto intuitivo de *verdad,* un predicado con las siguientes características: (i) el predicado veritativo se aplica a oraciones de un lenguaje particular; (ii) para que un predicado de un lenguaje particular sea el predicado veritativo de ese lenguaje, el mismo debería cumplir la condición (T); (iii) un predicado con esas características se aplica a todo tipo de oraciones, incluso en aquellos casos en donde la estructura de las mismas involucra el uso de variables y cuantificadores. En esos casos, hay que recurrir a la noción de *satisfacción*; por último, (iv) cuando el número de oraciones del lenguaje para el cual se elabore la definición sea infinito, es conveniente dar una caracterización recursiva del predicado veritativo. Claro que el uso de esas técnicas nos estará permitido siempre y cuando estemos en condiciones de ofrecer una definición explícita de los conceptos semánticos involucrados.

13. En este caso, los subíndices indican el lugar de la secuencia a considerar.

La l gica de la verdad.indd 32 04/07/2014 13:47:01

3. Definiciones tarskianas de verdad

3.1. Definiciones de verdad sin dominios

Uno de los objetivos que Tarski se había propuesto era el de brindar un método para la construcción de definiciones de predicados veritativos para lenguajes específicos. Para lograrlo, el proyecto debía ofrecer un criterio de adecuación vinculado con la forma que debería tener la definición, con las expresiones que se pueden legítimamente usar en la definición y con la manera en la que se debe obtener la extensión del concepto definido.

Lenguaje LCC:

Tarski (1935: 170) tomó la decisión de ilustrar su procedimiento describiendo su aplicación al cálculo de clases (LCC). Como todo lenguaje formal, este contiene expresiones lógicas (los conectivos '$\vee$' y '$\neg$', cuantificadores '$\forall$', y variables 'x'). Pero, posee un predicado 'I' cuyo significado pretendido es la relación de *inclusión* entre subclases de la clase de todos los individuos. El lenguaje posee omega variables, tantas como acentos subíndices puedan construirse. Por simplicidad, usaré la notación 'x_n' para la variable 'x' seguida de un número positivo *n* de acentos. Las interpretaciones de los signos lógicos son las usuales. Dadas las reglas usuales de buena formación de fórmulas, un ejemplo de fórmula bien formada elemental de este lenguaje es Ix_1x_5. Por supuesto, 'Ix_1x_5' es una fórmula abierta. Puede obtenerse una fórmula cerrada a partir de la misma, ligando cada una de las variables libres con sus respectivos cuantificadores. Así, por ejemplo, '$\forall x_1 \forall x_5 (Ix_1x_5)$' es una fórmula cerrada cuya interpretación es toda clase está incluida en otra. Además, pueden obtenerse fórmulas complejas aplicando las operaciones sobre los signos lógicos.

Es importante notar que a diferencia de lo que suele hacerse en nuestros días, Tarski trabajó sobre un lenguaje interpretado, esto es, con un lenguaje cuyas expresiones tienen un significado. En este sentido, no ejemplificó su definición sobre un instrumento formal que pudiera recibir diversas interpretaciones. Su idea fue tomar un lenguaje cuyos cuantificadores y variables correspondientes tomen como valores el conjunto de todas las subclases de la clase de todos los individuos del universo. Por supuesto, esta decisión afecta drásticamente a la noción de *interpretación*. De acuerdo a su punto de vista, interpretar es más

La l gica de la verdad.indd 33 04/07/2014 13:47:01

bien *reinterpretar*, esto es, interpretar un lenguaje consiste en realizar un *doble proceso*. En primer lugar, dada una oración interpretada O, obtener otra oración O´ reemplazando uniformemente las constantes no lógicas que aparecen en O por variables correspondientes de tipo apropiado. El resultado de este proceso se denomina *función oracional*. En segundo lugar, el proceso culmina asignando objetos apropiados a cada variable que aparezca en la correspondiente función oracional. Nótese que las funciones oracionales que se obtienen a partir de las oraciones del lenguaje de clases no serán, en general, oraciones (ya que tendrán variables libres). Por lo tanto, no cumplirán la propiedad de *ser verdaderas* o *ser falsas*. Pero serán verdaderas con respecto a una interpretación. Al mismo tiempo, es posible definir una noción aún más general, la de *función formular,* que es completamente análoga a la anterior, excepto en que en este caso la oración original puede se abierta.[14]

Un punto crucial es advertir que si el predicado '*I* es considerado un predicado lógico, los dos procedimientos tendrán resultados idénticos. Así, dada la oración

$\forall x_1 \exists x_5 (Ix_1x_5)$

su función oracional correspondiente sería

$\forall x_1 \exists x_5 (Ix_1x_5)$

ya que el mencionado predicado no sería reemplazado por ninguna variable. Por supuesto, si el lenguaje considerado tuviera expresiones no lógicas, los procedimientos no serían idénticos. Para apreciar el punto, consideremos la oración "todos aman a Alejandra", cuya representación formal podría ser

$\forall x_1 Ax_1 a$

el procedimiento tarskiano nos conduce a la siguiente función oracional

$\forall x_1 Xx_1 y$

en la cual 'X' e 'y' son variables nuevas. Una interpretación para esta función oracional sería una secuencia de entidades de tipo apropiado, esto es, simple-

14. Recuérdese que, en nuestros días, en cambio, trabajamos directamente con lenguajes sin interpretar. E interpretarlos consiste directamente asignar objetos apropiados a las variables correspondientes que figuren en la oración a interpretar. De esta manera, en la actualidad, el cálculo de clases sería visto como un típico lenguaje de segundo orden. Esto es, un lenguaje capaz de hablar de objetos (entidades de primer orden) y conjuntos de objetos (entidades de segundo orden).

La l gica de la verdad.indd 34 04/07/2014 13:47:01

mente entidades del primer nivel para las variables 'x_1' *e* 'y' y entidades del nivel siguiente (aquella que agrupará pares de objetos del nivel anterior) para 'X'. Ahora, retornemos a LCC.

Metalenguaje para LCC

Como hemos visto, la definición de *verdad* va a formularse desde un lenguaje que tenga recursos suficientes como para hablar de las oraciones del lenguaje para el cual se elabora la definición. Recuérdese que el objetivo es definir un predicado Tr en ML cuya extensión sea precisamente aquellas oraciones que resultan verdaderas en el LCC. Y no olvidemos que Tarski considera a LCC como un lenguaje interpretado. Esto le permite considerar al lenguaje objeto como una parte del ML. Es decir, la idea es tomar el lenguaje objeto y ampliar sus recursos expresivos. Sea LCC+ nuestro ML. Este instrumento lingüístico, además de contener todos los recursos expresivos de LCC, y un predicado Tr, debe poseer un mecanismo para generar nombres para las oraciones de LCC. Además, al igual que LCC, contiene expresiones lógicas (cuantificadores y conectivos). Dado que hemos tomado LCC, cuyos cuantificadores hablan de clases, necesitamos adoptar un ML con recursos expresivos suficientes como para hablar de *todas* secuencias de clases. En esta dirección, Tarski agrega a los recursos de LCC+ algunos términos de la lógica de las relaciones, que le permiten expresar secuencias ordenadas de objetos. Al mismo tiempo, Tarski adoptó la teoría de tipos finitos para garantizar que LCC+ tenga los recursos expresivos suficientes como para hablar de tales secuencias. Esto es, además de los axiomas y reglas de inferencia del sistema de lógica subyacente (la lógica clásica), en el ML se deben formular los axiomas y reglas de inferencia de la teoría fundamental que se adopte. En el caso de Tarski, los recursos probatorios de LCC+ incluyen los axiomas de extensionalidad, comprensión e infinitud.[15] Además, Tarski agrega a LCC+ algunos recursos que toma de la teoría de la equivalencia de clases y de la aritmética de los números cardinales, como *clase finita, clase infinita, potencia de una clase, número cardinal, número natural (o número cardinal finito), número cardinal infinito, 0, 1, 2, >, <,* etc. Y fundamentalmente inducción matemática.

15. Un hecho relevante desde el punto de vista histórico es que Tarski no eligió la teoría de conjuntos (tal como lo haríamos en nuestros días), sino una versión de la teoría de tipos finitos como parte de los instrumentos que adoptaremos para brindar tal definición. Y al parecer, él consideró a la misma, al igual que en nuestros días lo han hecho Boolos y Shapiro, como parte de la lógica.

La l gica de la verdad.indd 35 04/07/2014 13:47:01

Con todos estos recursos expresivos, Tarski muestra cómo definir en LCC+, de una manera precisa, las nociones de *fórmula, una variable x_n aparece libre en una fórmula F, secuencia apropiada de objetos, denotación de un término del cálculo de clases con respecto a una secuencia*. La técnica es hoy en día bien conocida y no me detendré en los detalles. Dadas las restricciones metodológicas antes mencionadas, todas estas nociones, aplicadas al lenguaje de clases, tienen que poder ser definidas sin la utilización de términos semánticos primitivos. Además, dado que los lenguajes usualmente contienen un número potencialemente infinito de oraciones, la estructura de la definición aplicará técnicas recursivas. Por último, como hemos visto, en los lenguajes que admiten fórmulas abiertas, para construir la definición de *verdad* es preciso recurrir a la noción de *satisfacción*. En ese caso, Tarski define recursivamente la noción de *satisfacción* de una función formular F cualquiera por una secuencia infinita *g* (cuyo dominio son los números enteros positivos y recorrido incluido en la clase de las subclases de todos los individuos). De manera intuitiva, si F fuera una función formular con una única variable libre, por ejemplo, $\exists x_1 \, I x_1 \, x_3$, tenemos que una clase cualquiera satisface F si y sólo si esa clase está incluida en alguna clase. De manera general,

> F es satisfecha por la secuencia g cuando F es verdadera si interpretamos la variable x_n que aparece en F como si fuera el nombre de la clase que aparece en el lugar n de la secuencia g.

Formalmente, podemos formular desde LCC+, la definición recursiva de este concepto:

La secuencia infinita de clases g satisface la función formular F si y sólo si g y F son tales que

o bien (i) existen números naturales n y m tales que $F = `I x_n x_m'$ y $g_n \subseteq g_m$

o bien (ii) hay una función formular G tal que $F = `\neg G\,'$ y g no satisface G,

o bien (iii) hay funciones formulares G y H tales que $F = `G \vee H\,'$ y g satisface G o g satisface H

o finalmente (iv) hay un número natural n y una función formular G tales que $F = `\forall x_n \, G'$ y toda secuencia infinita de clases que difiera de g a lo sumo en el n-ésimo lugar satisface la fórmula G.[16]

16 Tarski, A. (1935). p 193.

La l gica de la verdad.indd 36 04/07/2014 13:47:02

Una secuencia **g** satisface una función oracional **F** del lenguaje de clases sólo si (i)-(iv) garantizan que lo hace.

Nótese que (i) se aplica a fórmulas abiertas del lenguaje de clases. Por eso, habrá algunas secuencias que la satisfacen y otras que no. En particular, sólo aquellas secuencias en las que $g_n \subseteq g_m$ la secuencia satisface la fórmula en cuestión. Otro punto importante es que en este caso hay dos lugares de la secuencia que debemos tomar en consideración al establecer las condiciones necesarias y suficientes de satisfacción de una fórmula por parte de una secuencia (Tarski, 1935: 191-192). Por eso, de modo general, cuando un lenguaje tenga fórmulas con un número arbitrario de variables libres y con el propósito de adoptar un modo uniforme de hablar, Tarski adopta secuencias infinitas de objetos capaces de satisfacer o no las fórmulas abiertas de nuestro lenguaje. Claro, en el caso que se ha seleccionado, tales secuencias estarán formadas por clases. Nótese, además, que en (iv), se toma el caso en que la fórmula contenga un cuantificador. La idea es que una fórmula de ese tipo es satisfecha por una secuencia si para toda otra secuencia idéntica a la anterior, salvo quizás en lo que respecta al lugar de la secuencia que estemos considerando, esta secuencia satisface la fórmula abierta en cuestión. Esto permite que todos los objetos sean puestos en consideración al definir las condiciones bajo las cuales una oración en la que figure un cuantificador es satisfecha por una secuencia particular. Así, dada cualquier secuencia infinita, tomemos su lugar n, y podremos obtener infinitas secuencias alternativas idénticas a la secuencia original salvo el lugar n. El que una fórmula con un cuantificador universal sea satisfecha por una secuencia depende de que todas las secuencias construidas a partir de la original satisfagan la fórmula en cuestión.

A partir de las definiciones hasta aquí presentadas, es posible dar la definición de *ser verdadera una oración del lenguaje de clases:*

> Una oración **A** del lenguaje de clases es verdadera si y sólo si su función oracional **A'** es satisfecha por toda secuencia apropiada para el lenguaje de clases (Tarski, 1935: 195).
>
> Esto es,
>
> **'Tr ('A')** si y sólo si **A'** es satisfecha por toda secuencia apropiada para el lenguaje de clases.

Es importante enfatizar que las distintas secuencias de clases sólo pueden conducir a resultados distintos respecto de fórmulas con variables libres; con

La l gica de la verdad.indd 37 04/07/2014 13:47:02

respecto a las fórmulas cerradas u oraciones, en cambio, todas las secuencias se comportan de modo idéntico: o bien la satisfacen todas las secuencias o bien no la satisfacen ninguna. Así, en el caso extremo, cuando se trata de oraciones, y entonces tenemos fórmulas que no contienen ninguna variable libre, la satisfacción de la misma por una secuencia "no depende de las propiedades de los términos de la secuencia. Sólo quedan dos posibilidades entonces: o bien cada secuencia infinita [...] satisface a una oración dada, o bien ninguna la satisface. Las oraciones del primer tipo son las *oraciones verdaderas* [...] las del segundo tipo [...] pueden correspondientemente ser llamadas *oraciones falsas*" (Tarski, 1935: 194). De esta manera, cuando consideramos las circunstancias bajo las cuales una oración es verdadera o falsa, no tenemos que tener en cuenta explícitamente las circunstancias bajo las cuales esa expresión es satisfecha por todas las secuencias (es decir, secuencia por secuencia). Todo lo que tenemos que considerar es una secuencia.

Es un ejercicio no muy sofisticado demostrar que la anterior definición de *verdad* para el lenguaje del cálculo de clases es formalmente correcta. Tal demostración consiste en usar los recursos deductivos de la metateoría para mostrar que la anterior definición es una en la cual el predicado veritativo que cumple la convención T. Un predicado del ML que cumpla esta convención resultará coextensivo con el predicado intuitivo de verdad para LCC. La prueba formal supone el uso de los axiomas de la teoría de tipos finitos como parte de los recursos expresivos de LCC+, además de la lógica clásica.

Ejercicio 1: Dado el universo de las clases, construir una secuencia g tal que g no satisfaga $\exists x_n \, I x_n x_m$

Ejercicio 2: Muestre que $\exists x_m \, \forall x_n \, I x_n x_m$ implica $\forall x_n \, \exists x_m \, I x_n x_m$ y que $\forall x_n \, \exists x_m \, I x_n x_m$ no implica $\exists x_m \, \forall x_n \, I x_n x_m$

Ejercicio 3: Construya una secuencia finita de objetos que satisfaga la fórmula 'x_1 viaja a x_2 en x_3'

Enfaticemos que lo que hemos realizado hasta aquí es dar una definición de *verdad* para el lenguaje del cálculo de clases en términos del concepto de *satisfacción* y una definición recursiva de este último concepto. Sin embargo, la tarea no está concluida. Tenemos que mostrar cómo se puede obtener una definición explícita de *satisfacción*. Tal cosa puede hacerse aplicando una técnica estándar, desarrollada por Frege y perfeccionada por Gödel, para convertir las definiciones

La l gica de la verdad.indd 38 04/07/2014 13:47:02

recursivas en definiciones explícitas.[17] En esta dirección, la técnica nos permite obtener el siguiente resultado:

> La secuencia infinita g satisface una fórmula *F* del lenguaje de clases si y sólo si hay una relación binaria *R* entre secuencias y fórmulas tal que se cumplen las siguientes condiciones:

(c) si existen números naturales n y m tales que $G = \text{`}Ix_n x_m\text{'}$ y $g_n \subseteq g_m$, entonces $\langle g, G\rangle$ pertenece a *R*.

(d) si $\langle g, G\rangle$ no pertenece a R, entonces $\langle g, \text{`}\neg G\text{'}\rangle$ pertenece a R,

(e) si $\langle g, G\rangle$ pertenece a R, o $\langle g, H\rangle$ pertenece a R, entonces $\langle g, \text{`}G \vee H\text{'}\rangle$ pertenece a R.

(f) para todo número natural n y una fórmula G, si toda secuencia infinita de clases g´ que difiera de la secuencia g a lo sumo en el n-ésimo lugar es tal que $\langle g', G\rangle$ pertenece a R, entonces $\langle g, \text{`}\forall x^n G\text{'}\rangle$ pertenece a R (Tarski, 1935: 193).

Para mostrar que esta definición explícita cumple con la condición T, lo principal es garantizar que exista la relación binaria como parte de las cosas sobre las que LCC+ puede hablar. En términos expresivos, esta definición debe realizarse desde un lenguaje con recursos expresivos suficientes como para hablar de esta relación y expresar las condiciones que secuencias de entidades y fórmulas deberían cumplir. Pero, mientras que LCC sólo habla acerca de clases y clases de clases, LCC+ es un lenguaje que tiene que ser capaz de hablar de las relaciones entre las asignaciones de las variables del cálculo de clases (clases de clases) y fórmulas. La aparición de una relación no debe asustarnos: se trata de una clase de pares ordenados entre las mencionadas asignaciones (clases de clases) y fórmulas. Y aunque un lenguaje capaz de expresar tales entidades es uno que cuenta con mayor poder expresivo que el lenguaje de partida, el mismo está dentro de la jerarquía de tipos finitos. Esto es, al aplicar el método que permite convertir la definición recursiva de *satisfacción* en una definición explícita, se ha puesto en evidencia una característica importante de las definiciones tarskianas de verdad: las mismas deben realizarse desde un lenguaje con más recursos expresivos que

17. Para detalles de este método, ver McGee (1991: 73-76).

La l gica de la verdad.indd 39 04/07/2014 13:47:02

el lenguaje para el cual se elabora la definición. Por otra parte, la existencia de tal clase no debe conducir a contradicción. Si lo hiciera, no obtendríamos una caracterización consistente del predicado veritativo del lenguaje del cálculo de clases. Y claro, la única garantía que contamos es la presunta consistencia de la teoría de partida (en nuestro caso, la teoría de tipos finitos adoptada desde LCC+). Si la mencionada clase de pares de clases de clases y fórmulas es una entidad que forma parte del universo de la teoría de tipos finitos, bajo la suposición de que la misma es consistente, podemos estar seguros de que la caracterización del predicado veritativo del lenguaje del cálculo de clases no conduce a inconsistencias.

En síntesis, en este apartado he presentado una definición tarskiana de verdad para el cálculo de clases. Fundamentalmente, se ha definido el predicado veritativo del cálculo de clases en términos del concepto de *satisfacción*: una oración del mencionado lenguaje resulta verdadera si y sólo si es satisfecha por toda secuencia apropiada de objetos. Como hemos visto, la técnica de Tarski incluye dar una definición recursiva del concepto de *satisfacción*. Tal definición habla de secuencias de clases de clases y fórmulas. Por último, ya que la teoría no debería contener términos semánticos primitivos, he mostrado cómo convertir tal caracterización recursiva en una definición explícita. Al hacerlo, se ha puesto en evidencia que el ML desde el cual he realizado la definición cuenta con más recursos expresivos que el lenguaje del cálculo de clases.

3.2. La verdad relativa a un modelo M

Un punto importante que hay que mencionar es que en las definiciones precedentes no hay un recurso explícito a dominios de individuos a partir del cual se construyen las secuencias de objetos. De hecho, y a diferencia de lo que usualmente ocurre en nuestros días al dar una caracterización del predicado veritativo de un lenguaje, no hay mención alguna de la noción de *modelo*. Estas omisiones han provocado un intenso debate. Así, tanto Etchemendy, como Bays y Mancosu han sostenido que Tarski adoptó una noción de *modelo* que supone implícitamente el recurso a un único dominio. Tal posición recibe el nombre de concepción de dominio fijo [*fixed domain conception*]. Este enfoque se contrapone a la tesis defendida por Mario Gómez-Torrente según la cual ya en la presentación tarskiana hay variabilidad de dominios. Este último enfoque recibe el nombre de concepción de dominio variable [*variable domain conception*]. En la

La l gica de la verdad.indd 40 04/07/2014 13:47:02

actualidad, en cualquier presentación de la semántica de los lenguajes de primer orden, la especificación de los valores del predicado de verdad se relativiza a un modelo, entendido como una estructura conjuntista compuesta por un dominio y una función de interpretación. Distintos modelos de un mismo conjunto de fórmulas bien formadas de un lenguaje pueden compartir un mismo dominio alterando la interpretación de las expresiones no lógicas del lenguaje. Pero, además, un mismo conjunto de fórmulas pueden tener más de un modelo con distintos dominios. En cualquier caso, y a diferencia del tratamiento tarskiano, hay una mención explícita de un conjunto que determina el rango de valores de las variables de las fórmulas del lenguaje. Y tal conjunto (dominio) puede variar de modelo en modelo.

Para apreciar los detalles, sea LPO un lenguaje de primer orden que contiene constantes de individuos ('c_1', 'c_2', ..., 'c_n'), variables de individuos ('x_1', 'x_2', ..., 'x_n'), símbolos de predicados n-ádicos ('P_1', 'P_2',...'P_n'), las conectivas lógicas '¬'. '∧', '∨' y '⊃' y los cuantificadores de primer orden '∀' y '∃'. Obviamente, por medio de una definición recursiva podemos caracterizar el conjunto de fórmulas bien formadas de LPO. Como hemos enfatizado, no estamos tomando a LPO como un lenguaje interpretado. Eso permite que pueda recibir distintas interpretaciones. En términos más precisos, un modelo para LP0 especifica una interpretación I tal que:

1. Un conjunto no vacío D (dominio) sobre el cual las variables tienen alcance.
2. Para cada constante c_i, un objeto o tal que $o \in D$.
3. Para cada predicado P_i, un conjunto A tal que $A \subseteq D$.

Distintas estructuras $< D, I >$ pueden ser utilizadas para dar un significado a las expresiones de LPO. Una vez que se da un modelo M (se toma un conjunto no vacío particular y una función de interpretación), toda oración de LPO puede ser evaluada como verdadera o falsa en el modelo M. Para enfatizar este punto, lo que hasta aquí expresamos como α es verdadera ($Tr('\alpha')$), ahora será relativizado a un modelo: $V_M('\alpha') = 1$.

En teoría de modelos, la variabilidad de los dominios de estas estructuras es una nota distintiva. Distintos dominios son utilizados para interpretar un mismo lenguaje. La idea de tomar lenguajes no interpretados resulta útil para

La l gica de la verdad.indd 41 04/07/2014 13:47:02

hablar acerca de las nociones lógicas, ya que las mismas no dependen de que el lenguaje tenga una interpretación particular. En este sentido, la idea intuitiva es que una verdad lógica es una verdad que está garantizada pura y exclusivamente por el significado de las expresiones lógicas, sin importar ni el dominio ni la interpretación particular que se seleccione.

3.2.1. Modelos sustitucionales para los lenguajes de primer orden

Un *modelo sustitucional* para un lenguaje de primer orden es una estructura conjuntista $<D, I>$ donde D, el dominio, es un conjunto no vacío cuya existencia está garantizada por la teoría de conjuntos. El otro componente del modelo I, la interpretación, tiene como función especificar los valores semánticos de las expresiones no lógicas de L. Lo hace asignando objetos a las constantes de individuos y n-tuplas a los predicados n-arios. La función de interpretación I debe cumplir los siguientes requisitos:

(i) si c es una constante de individuos de L, entonces $I(c) \in D$
(ii) si P es es una letra de predicados n-ádica de L, entonces $I(P) \subseteq D^n$

Las variables del lenguaje reciben un valor semántico al substituirlas por una constante del lenguaje. La operación $[c/x]$ es mecanismo sintáctico que permite reemplazar la variable x por la constante c. Por eso, cuando se usa un modelo sustitucional, se asume que hay tantos nombres como individuos en el universo de discurso de la teoría. Recuérdese que un modelo simula ser una interpretación intuitiva de las expresiones no lógicas de la teoría. Por eso, para que esta simulación sea adecuada, debemos tener tantas estructuras como modos de interpretar intuitivamente las expresiones no lógicas de LPO. De lo contrario, podría haber una fórmula de LPO que resultara falsa cuando asignamos una interpretación intuitiva a sus expresiones no lógicas, pero frente a la cual no existiera un modelo en el cual resulte falsa. Si esto fuera así, por carencias expresivas de la teoría de modelos, dejaríamos de representar información fundamental respecto de la verdad de las fórmulas de LPO.

Siguiendo esta dirección, la noción de verdad relativa a un modelo (V_M) se define recursivamente de la siguiente manera:

La l gica de la verdad.indd 42 04/07/2014 13:47:02

(i). Si $Pa_1... a_n$ es una fórmula atómica de L, V_M ('$Aa_1... a_n$') = 1 sii $<I(a_1),..., I(a_n)> \in I(P)$
(ii). V_M ('$\neg A$') = 1 sii V_M ('A') = 0
(iii). V_M ('$A \wedge B$') = 1 sii V_M ('A') =1 y V_M ('B') =1
(iv). V_M ('$A \vee B$') = 1 sii V_M ('A') =1 o V_M ('B') =1
(v). V_M ('$A \supset B$') = 1 sii V_M ('A') = 0 o V_M ('B') =1
(vi). V_M ('$\forall x A$') = 1 sii para toda constante c de L, se da que V_M ([c/x] A) = 1
(vii). V_M ('$\exists x A$') = 1 sii para al menos una constante c de L, se da que V_M ([c/x] A) = 1

Si V_M ('A') = 1, entonces A es verdadera en el modelo M.

Esta definición recursiva nos brinda qué valor de verdad obtiene, en relación con un modelo determinado, cualquier fórmula de LPO. A partir de la definición recursiva de V_M estamos en condiciones de definir la clase de verdades que resultan ser verdades lógicas. En este sentido:

A *es universalmente válida* si y sólo si para todo modelo (sustitucional) M, V_M ('A'): 1.

Intuitivamente, las fórmulas que resultan ser universalmente válidas (en términos de la teoría de modelos) representan verdades lógicas. Esto es así, ya que independientemente de cómo se interpreten sus expresiones no lógicas, las mismas son siempre verdaderas. De la misma manera, podemos definir:

A es una *consecuencia semántica* de Γ si y sólo si para todo modelo M, la V_M (Γ): 1, entonces V_m ('A'): 1

Los modelos sustitucionales tienen interesantes características. Sin embargo, parecen asumir injustificadamente que hay tantos nombres como objetos dentro de los dominios de todos los modelos. Y si bien para los casos en los cuales los universos de discurso representados sean finitos tal suposición podría no resultar difícil de adoptar, la situación no es similar cuando los universos de discurso representados son infinitos. Específicamente, sólo si adoptásemos lenguajes con infinitas no numerables constantes podrías obtener una noción de *modelo sustitucional* adecuada para representar todos los modos de interpretar

La l gica de la verdad.indd 43 04/07/2014 13:47:02

los expresiones no lógicas de LPO. Esta dificultad nos conduce directamente al segundo tipo de modelo.

Ejercicio 4: Muestre que hay al menos un modelo que no es sustitucional

3.2.2. Modelos por asignación para un lenguaje de primer orden

Al igual que los modelos por substitución, un modelo por asignación para LPO es una estructura <D, I> en la que D es un conjunto no vacío e I es una función que asigna entidades adecuadas del D a los términos no lógicos (objetos a las constantes de individuos y n-tuplas a los predicados n-arios). Pero, a diferencia del caso anterior, no podemos contar con la operación de substitución [c/x]. Recordemos que la misma era utilizada para asignar valores a las variables de las fórmulas de LPO. En los modelos por asignación, contamos con una nueva función que permite realizar esa tarea sin asumir que contamos con nombres para cada objeto de universo de discurso. Así, una asignación de variables *g* es una función de las variables de LPO a D. Informalmente, la función de asignación g atribuye directamente individuos u objetos del dominio de discurso a las variables. No es una función que actúa sólo en el plano del lenguaje. Ella es una función semántica, ya que vincula expresiones lingüísticas con objetos del dominio. Por eso, un término singular de LPO recibirá un valor semántico en el modelo según se trate de una variable o una constante de individuos. Formalmente, si t un término (constante, variable o función), entonces:

$[t]_{M,g} = I(t)$ si t es una constante de LPO.
$[t]_{M,g} = g(t)$ si t es una variable de LPO.

Si M es un modelo, *D* su dominio, *I* su función de interpretación y *g* una asignación en *D*, entonces se define la satisfacción del modelo y la asignación de la siguiente manera:

i. $V_{M\,g}(\text{`}Pt_1 \ldots t_n\text{'}) = 1$ sii $<[t_1]_{M,g}, \ldots, [t_n]_{M\,g}> \in I(P)$
ii. $V_{M\,g}(\text{`}\neg A\text{'}) = 1$ sii $V_{M\,g}(\text{`}A\text{'}) = 0$
iii. $V_{M\,g}(\text{`}A \wedge B\text{'}) = 1$ sii $V_{M\,g}(\text{`}A\text{'}) = 1$ y $V_{M\,g}(\text{`}B\text{'}) = 1$

La l gica de la verdad.indd 44 04/07/2014 13:47:02

iv. $V_{Mg}(\text{'A} \vee \text{B'}) = 1$ sii $V_{Mg}(\text{'A'}) = 1$ o $V_{Mg}(\text{'B'}) = 1$
v. $V_{Mg}(\text{'A} \supset \text{B'}) = 1$ sii $V_{Mg}(\text{'A'}) = 0$ o $V_{Mg}(\text{'B'}) = 1$
vi. $V_{Mg}(\text{'}\forall \text{ x A'}) = 1$ sii para toda asignación g' idéntica a g excepto quizás en lo que asigna a x, se da que $V_{Mg'}(\text{'A'}) = 1$
vii. $V_{Mg}(\text{'}\exists \text{ x A'}) = 1$ sii para alguna asignación g' idéntica a g excepto quizás en lo que asigna a x, se da que $V_{Mg'}(\text{'A'}) = 1$.

Si $V_{Mg}(\text{'}\alpha\text{'}) = 1$, entonces α es verdadera en el modelo M.

A partir de la definición recursiva de V_{mg} estamos en condiciones de definir la clase de verdades que resultan ser verdades lógicas. En este sentido:

A es *universalmente válida* si y sólo si para todo modelo M, $V_{Mg}(\text{'A'})$: 1.
De la misma manera, podemos definir:

A *es una consecuencia semántica* de Γ si y sólo si para todo modelo M, la V_{Mg} (Γ): 1, entonces $V_{mg}(\text{'A'})$: 1

La noción de *validez universal* en los lenguajes de primer orden es completa, esto es, hay al menos un sistema axiomático finitista que pueda tener suficiente capacidad de prueba como para demostrar como teoremas todas las fórmulas universalmente válidas. Dado que tales sistemas son correctos, las nociones de *validez universal* y *teoremicidad* son extensionalmente equivalentes. La noción de verdad en un modelo es compacta: dado un conjunto Γ, Γ tiene modelo ssi para todo $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ y Γ^{fin}, Γ tiene modelo. Además, cumple el Teorema Löwenheim-Skolem: si un conjunto de fórmulas Γ tiene modelo, entonces tiene un modelo enumerable.

Es importante notar que las definiciones de validez y de consecuencia incluyen una generalización universal sobre una infinidad de estructuras conjuntistas.[18] Cada una de ellas, con sus dominios y funciones de interpretación. Distintos modelos quedan constituidos a partir de distintos conjuntos que puedan desempeñar el papel de sus dominios. Habrá modelos cuyos dominios son de tamaño finito, habrá modelos que en cambio tendrán dominios cuyos dominios son

18. Nótese que es justamente el elemento modal tradicional de la noción intuitiva de *consecuencia* el que es reemplazado por esta cuantificación sobre estructuras.

La l gica de la verdad.indd 45 04/07/2014 13:47:03

infinitos. Esta posibilidad de obtener distintos modelos alterando el tamaño de sus dominios tiene implicancias respecto de la extensión del conjunto de fórmulas que resultan universalmente válidas. Por ejemplo, consideremos la fórmula:

$\exists x \exists y \neg(x=y)$

Sea M_1 un modelo $<D, I>$, donde "D" es el conjunto $\{0,1\}$ y la función de interpretación $I(=): \{<1,1>, <0,0>\}$. Dada esta estructura, $V_m(\exists x \exists y \neg(x=y))$: 1. Sin embargo, sea M_2 un modelo $<D, I>$, donde "D" es el conjunto $\{0\}$ y la función de interpretación $I(=):\{<0,0>\}$. Dada esta estructura, $V_m(\exists x \exists y \neg(x=y))$: 0. Esto muestra que la fórmula "$\exists x \exists y \neg(x=y)$" no es universalmente válida, ya que hay al menos un modelo en la cual su valuación es 0. Esto es, la variabilidad de los dominios de los modelos produce que las afirmaciones acerca de la cardinalidad del universo no sean verdades lógicas. Sea cual sea el número de objetos que hay, la verdad del enunciado que establezca tal verdad no es asunto lógico.

En este punto, retornemos a la polémica previa acerca de la variabilidad de dominios. De acuerdo con Etchemendy (1988), la adopción de una concepción que no permita alterar la cantidad de entidades que puedan estar involucradas en las mencionadas asignaciones tiene consecuencias anti-intuitivas.[19] Uno de ellos se vincula al hecho anterior: si no se adopta variabilidad de los dominios, hay fórmulas que resultan ser lógicamente verdaderas que intuitivamente no lo serían.

Así, afirma Etchemendy (1988):

> For the standard account, besides requiring that we canvass all reinterpretations of the nonlogical constants, also requires that we vary the domain of quantification. However, as long as the quantifiers are treated as logical constants, Tarski's analysis always leaves the domain of quantification fixed. Because of this, sentences like (15) will come out logically true on Tarski's account:

$(\exists x)(\exists y)\neg(x = y)$

19. Nótese esto no significa que Etchemendy adhiera al enfoque modelístico contemporáneo. Entre otras objeciones, afirma que este análisis de la noción intuitiva de consecuencia corre el riesgo de sobre-generalizar: es decir, dándo como válidos argumentos que preteóricamente daríamos como inválidos.

La l gica de la verdad.indd 46 04/07/2014 13:47:03

> This simply because on the present selection of logical constants, there are no non-logical constants in the sentence to replace with variables. Thus, such sentences are logically true just in case they happen to be true; true, of course, on the intended interpretation.

Timothy Bays (2001) ha enfatizado el punto de Etchemendy señalando que, al adoptar un único dominio y no permitir su variación, oraciones que describen hechos acerca de la cardinalidad del universo resultan ser consecuencia lógica de cualquier conjunto de oraciones. Por supuesto, lo anterior es el resultado de haber aceptado que tales oraciones resultan ser lógicamente verdaderas, y por lo tanto, son implicadas lógicamente por cualquier conjunto de oraciones. Pero, ¿cómo es posible que la lógica, por sus propios medios, determine el número de cosas que existen?

Hay dos puntos a discutir frente a esta objeción. En primer lugar, podría pensarse que tal conclusión no es un problema para Tarski. Frecuentemente, consideró el axioma de infinitud como parte de la lógica. Y su adopción de la teoría de tipos como una herramienta de la teoría de modelos parece abonar tal dirección. Que se covierta en una verdad lógica cualquier afirmación acerca de la cardinalidad del universo es una consecuencia del presunto estatus lógico de las entidades de las que habla la teoría de tipos. Pero, en segundo lugar, queda analizar si la noción de *modelo* usada por Tarski es o no equivalente a la que utilizamos usualmente. Etchemendy y Bays han insistido en que la concepción tarskiana de dominio fijo no se corresponde extensionalmente con la noción de *validez universal* de la Teoría de Modelos con variabilidad de dominios.[20] Además, dando plausibilidad histórica, Bays y Mancosu observan que la concepción de modelos con dominio fijo era bastante común en la época en la que trabajó Tarski. Los lógicos usaban frecuentemente la teoría de tipos en la cual el dominio de individuos era fijo.

Por supuesto, podría replicarse que la concepción de modelos con dominio fijo es tan implausible que no es demasiado caritativo atribuírsela a Tarski. Es evidente que Tarski conocía los resultados metateóricos de su época y resulta difícil entender cómo conciliarlos con la mencionada concepción. En particular,

20. Feferman cree que el apego a la teoría de tipos finitos es la base de la cautela tarskiana para mencionar explícitamente la posibilidad de relativizar la atribución de verdad a un modelo.

La l gica de la verdad.indd 47 04/07/2014 13:47:03

no es fácil ver cómo reconciliar este enfoque con las dos versiones del teorema Löwenheim-Skolem que hablan de modelos de distinta cardinalidad.

A diferencia de los mencionados autores, Gómez Torrente (1996; 2009) ha insistido en que es posible mostrar que ambos enfoques son complementarios. En este sentido, defiende una suerte de pluralismo tarskiano acerca de la noción de *modelo*. Es decir, de acuerdo con Gómez Torrente (2009: 250-251), Tarski tuvo:

> a disposition to work within a variety of different frameworks, each with its own assumptions and conventions.

Por eso, en lo que respecta a los modelos con los que Tarski trabajó, no habría una oposición entre los enfoques de dominio fijo y dominio variable. Pero, ¿cómo es esto posible si no hay mención explícita a dominios? De acuerdo a Gómez Torrente, Tarski usó un mecanismo distinto para hacer variar los dominios sin mencionarlos explícitamente. En este sentido, Gómez Torrente (1996: 143) ofrece una solución técnica al problema de Etchemendy:

> Tarski had in mind mathematical theories in whose canonical formulation the domain of objects of the intended interpretation or interpretations is the extension of a primitive predicate of the language of the theory. Assuming that to specify a domain for an interpretation is nothing but to give an interpretation for such a predicate, Tarski's definition would allow for domain variation in the test for logical consequence. Under this assumption, sentences like '$\exists x\, \exists y \neg (x = y)$' would not be declared logical truths, because they would be mere unofficial abbreviations for other sentences with relativized quantifiers ('$\exists x\, \exists y\, (Nx \,\&\, Ny \,\&\, \neg(x = y))$' for example). It is natural to picture Tarski as having in mind the idea that the domain of the intended model or models is denoted by an extra-logical predicate, but without even thinking of formulating or caring to formulate this as an explicit requirement for the application of his definition'

En este sentido, $\exists x\, \exists y \neg(x = y)$ no es ni una verdad lógica ni consecuencia lógica de cualquier conjunto de fórmulas, ya que por medio de la interpretación de un predicado primitivo no haría falta el recurso a diversos dominios para garantizar la existencia de modelos que no satisfagan dicha fórmula. Nótese, de paso, que tal como lo hace Gómez Torrente y lo reconocen Bays y Mancosu, este mecanismo era usual en los tiempos de Tarski. Por lo cual, no resulta implausible que él lo hubiera adoptado implícitamente en el texto de 1936.

La l gica de la verdad.indd 48 04/07/2014 13:47:03

Sin embargo, las réplicas no se han hecho esperar. Mancosu (2006; 2010) discute el hecho de que el mencionado trabajo haya refutado el punto de vista de Etchemendy. Al igual que Gómez Torrente, Mancosu aporta evidencia textual a favor de la tesis según la cual Tarski adoptó una concepción de modelo con dominio fijo. Y aunque admite la plausibilidad inicial de la propuesta que involucra predicados, argumenta que tal solución no muestra que Tarski no adoptó una concepción de modelo con un único dominio. De hecho, sostiene que podemos pensar al predicado 'N' como hablando de diferentes interpretaciones bajo la misma clase universal de individuos brindada por la subyacente teoría de tipos (Mancosu, 2006: 219). Lo que está en juego es:

Si los cuantificadores son constantes lógicas (interpretación siempre fija).
Si hay distinción entre dominio de cuantificación y rango de las variables individuales.

Nótese, sin embargo, que del hecho según el cual Tarski no menciona dominios al hablar de las secuencias de objetos que satisfacen las funciones oracionales no se sigue que haya adoptado el recurso a un único dominio. Sólo adoptando el supuesto según el cual, tanto la asignación de valores a las variables como la interpretación de las expresiones no lógicas del lenguaje, sólo puede hacerse "englobando" en una entidad única a *todos* los objetos involucrados en el procedimiento, se seguiría la conclusión de Etchemendy. Este supuesto usualmente es conocido como el principio *todo en uno* [*all in one*]. Pero Tarski usa directamente secuencias de objetos y tal cosa no presupone que todos los objetos que participan de las secuencias estén reunidos en alguna entidad. Una alternativa es pensar que sin englobar en una única entidad, los cuantificadores podrían fijar su alcance [*all in many*]. En cualquier caso, un problema es el de la mención u omisión del los dominios y otra su variabilidad. Una manera análoga en la que se puede presentar este punto de disputa es si la satisfacción se realiza por todas las secuencias apropiadas o por todas las secuencias en absoluto (Milne, 1999). Nótese que esta definición recursiva de *valuación relativa a un modelo y a una función de asignación* es estrictamente paralela en cuanto a su estructura a la definición tarskiana dada para LCC. Fundamentalmente, adviértase que, como los únicos valores de *g* de los que depende $V_{M,g}$('A') son los que *g* asigna a las variables libres que aparecen en α, en el caso en el que α sea una oración, α tiene el mismo valor para todas las *g*. En este sentido, la función g juega exac-

La l gica de la verdad.indd 49 04/07/2014 13:47:03

tamente el mismo papel que las secuencias de objetos en la definición de verdad para LCC. Antes, las fórmulas cerradas eran satisfechas por todas las secuencias de objetos o por ninguna. Ahora, tales fórmulas o son satisfechas por todas las funciones g o por ninguna.

Ejercicio 5: Reflexione: ¿Hay un modelo por asignación capaz de representar la interpretación estándar de la teoría de conjuntos? Si lo hubiera, ¿cuál sería su dominio?

3.2.3. Definición de verdad relativa a un modelo para el lenguaje de orden superior

La importancia de los lenguajes de primer orden es relativamente reciente. En tiempos de Tarski, no existía tal cosa. De hecho, LCC puede ser visto como un lenguaje de orden superior cuyas variables están restringidas a clases dentro del universo (dominio) de las clases. Como tal, en esta lectura, no serían vistas como individuos sino como subconjuntos de un conjunto: el universo de las clases. El método de Tarski puede extenderse fácilmente a lenguajes de orden superior. Y lo mismo sucede con la teoría de modelos. Esto es, dentro de esta teoría somos capaces de dar una definición recursiva de $V_{M,g}$ para cualquier lenguaje de cualquier orden. Con el propósito de extender las técnicas desarrolladas hasta aquí, sea LHO un lenguaje de orden superior. Su vocabulario contiene, además del vocabulario de LPO, variables de predicados n-ádicas para cada uno de los tipos 2, 3, n ('X^2_1', 'X^2_2',...,'X^2_n ', ..., 'X^n_1', 'X^n_2',...,'X^n_n') y los cuantificadores de segundo orden '$\exists X$' y '$\exists X$'. Obviamente, por medio de una definición recursiva podemos caracterizar el conjunto de fórmulas bien formadas de LHO. Los lenguajes de primer orden tienen variables cuyo rango es un conjunto de objetos. La colección de ellos es el dominio del modelo. Un mismo lenguaje puede recibir distintas interpretaciones. Los lenguajes formales de orden superior tienen, además de variables de primer orden, variables de cualquier orden. Para simplificar la idea, consideremos las variables monádicas de segundo orden. Intuitivamente, tales variables tienen un rango sobre otros tipos de entidades: propiedades, conceptos, colecciones, conjuntos o clases. Los lenguajes de segundo orden permiten expresar mediante sus fórmulas conceptos que no pueden ser expresados en los lenguajes de primer orden. Así, la fórmula:

La l gica de la verdad.indd 50 04/07/2014 13:47:03

$(\exists P^2)\ (\forall x^1)\ (P^2\ x^1)$

permite expresar que hay una propiedad que todos la tienen. Y

$(\forall P^2)\ (\exists x^1)\ (P^2\ x^1)$

que toda propiedad la tiene algún individuo. Con tales recursos, podemos expresar conceptos de la aritmética y de la teoría de conjuntos como finitud,

$FIN^3(X^2)$

Cardinal Inaccesible

$INAC^3(X^2)$

Hay una relación de segundo orden no reflexiva

$(\exists R^2) \neg (R^2\ xx)$

Hay una relación de segundo orden tal que todos los objetos de primer orden la cumplen con algún objeto de primer orden.

$(\exists R^2)\ (\forall x^1)\ (\exists y^1)\ (R^2\ x^1\ y^1)$

Teniendo en cuenta lo anterior, al igual que en el caso de primer orden, un modelo M es una estructura $<D, I>$, tal que, la asignación de variables g es una función que asigna:

- Un miembro de D a cada variable de primer orden.
- Un subconjunto de D^n a cada relación n-ádica.

Si el rango de *g* para las variables de predicados es el conjunto potencia de D^n, entonces se tratará de una semántica estándar. En los modelos estándar, los dominios de los cuantificadores de orden superior tienen una enorme riqueza expresiva (Shapiro, 1991). Por ejemplo, consideremos el caso de las variables

La l gica de la verdad.indd 51 04/07/2014 13:47:03

de segundo orden. En la semántica estándar, ellas toman como valores todos los subconjuntos de un dominio infinito numerable. Por eso, dado el teorema de Cantor, podemos hablar acerca de más entidades que objetos sobre los que podemos cuantificar en primer orden: hay incontables valores para esas variables. Como consecuencia de esta riqueza expresiva, no hay medios expresivos para describir cada uno de esos conjuntos dentro de un lenguaje con un número infinito numerable de expresiones. En cambio, si el rango de g es un subconjunto fijo del conjunto potencia de D^n, entonces se tratará de un modelo Henkin. Una nota fundamental es que si se adopta una semántica a la Henkin para lenguajes de segundo orden, no se obtiene todo el poder expresivo de la lógica de segundo orden, sino la de una lógica *multivariada* en la que valen la mayoría de los metateoremas de primer orden.

Resta definir recursivamente la noción de $V_{M,g}$ para un LHO. Con este propósito, la definición de $V_{M,g}$ para un LPO se amplía incorporando las siguientes cláusulas:

i. $V_{M,g}$ ('$Xt_1 \ldots t_n$') = 1 sii $<[t_1]_{M,g}, \ldots, [t_n]_{M,g}> \in g$ (X).
ii. $V_{M,g}$ ('$\forall XA$') = 1 sii para toda asignación g' idéntica a g excepto quizás en lo que asigna a X, se da $V_{M,g'}$('A') = 1.
iii. $V_{M,g}$ ('$\exists XA$') = 1 sii para alguna asignación g' idéntica a g excepto quizás en lo que asigna a X, se da $V_{M,g'}$('A') = 1.

Nótese que en i. la función de asignación crucialmente asigna un número no numerable de valores a X. Análogo es su comportamiento en las restantes cláusulas. Esto permite que esas asignaciones sean distintas a las asignaciones de los modelos de primer orden. Las fórmulas del lenguaje de segundo orden que resultan ser verdaderas en todo modelo que adopta la semántica estándar resultan ser las verdades lógicas. Esto es,

A es *lógicamente verdadera* ssi $V_{M,g}$ ('A'): 1 en todo modelo estándar.

Del mismo modo,

A es una *consecuencia semántica* de Γ ssi para todo modelo estándar $V_{M,g}$ (Γ): 1 entonces $V_{M,g}$ ('A'): 1

La l gica de la verdad.indd 52 04/07/2014 13:47:04

La noción de *validez universal* en los lenguajes de orden superior es intratable como resultado de la riqueza expresiva de tales lenguajes. Esto es, no hay ningún sistema axiomático finitista que pueda tener suficiente capacidad de prueba como para demostrar como teoremas todas las fórmulas universalmente válidas. Es decir, la lógica de orden superior es incompleta. Las nociones de *validez universal* y *teoremicidad* no son extensionalmente equivalentes. La lógica de orden superior no es compacta. Una manera de ver el punto es que la prueba de Henkin no se generaliza para el caso de segundo orden. Para definir un modelo canónico para el conjunto Γ^{Max} en el caso de segundo orden, hay que agregar la siguiente cláusula a la función de valuación V_M:

– Si Γ^{Max} contiene $\exists x\, A(x)$ entonces contiene $\varphi(a)$ para alguna constante a del mismo orden que x.
– Si Γ^{Max} contiene $\exists X\, A(X)$ entonces contiene $\varphi(R)$ para alguna constante de predicado R del mismo orden que X.

En ambos casos, se define un dominio desde donde se asignan valores a las expresiones no lógicas y a las variables.

– V_M (‘$\exists X\, A(X)$’) = 1 ssi dado el conjunto de todos los subconjuntos del dominio, alguno de ellos satisface $A(X)$.

De esta manera, verdad en términos un modelo definido a partir de Γ^{Max} no necesita ser equivalente a la inclusión en Γ^{Max}. Por ejemplo, $\neg\exists X\, A(X)$ y por lo tanto, todas las instancias de la forma $\neg A(R)$ para R_i en el lenguaje aumentado pueden ser miembros de Γ^{Max}, pero $\exists X\, A(X)$ puede ser verdadero en el modelo si algún indefinible subconjunto de D satisface $A(X)$. Por lo tanto, $\neg\exists X\, A(X)$ podría ser falsa aún si todas sus instancias definibles son verdaderas. Es decir, aunque hemos construido un modelo, no tenemos garantías acerca de que es un modelo de Γ^{Max}.

Como contrapartida, como en estos lenguajes se pueden formular los conceptos de la matemática, se suele ver tal imposibilidad de tratamiento de la noción de *consecuencia* como el resultado de la intratabilidad axiomática del discurso matemático en general.

La l gica de la verdad.indd 53 04/07/2014 13:47:04

La lógica de orden superior ha recibido diversas críticas. Por ejemplo, Quine sostiene que adoptar cuantificadores de segundo orden compromete con conjuntos porque (i) "ser es ser el valor de una variable", (ii) "los cuantificadores de segundo orden comprometen con conjuntos", y (iii) "las asignaciones a las variables de orden superior dentro de la teoría de modelos son conjuntos". (Tanto en la semántica estándar como en la de Henkin.) Y la lógica no debería estar comprometida con nada. La lógica debería ser neutral respecto de su tópico. Y aún cuando se admitiera lo anterior, la teoría de conjuntos y sus conjeturas (por ejemplo, la hipótesis del continuo) interfieren en la codificación de las estructuras que determinan la relación de *consecuencia* de la lógica superior (Jané, 2006). La lógica debería ser universal (se aplica en todos las disciplinas), pero si la relación de *consecuencia* fuera relativa a la teoría de conjuntos y ésta se apoya en conjeturas que no están suficientemente claras, la lógica dejaría de ser universal. En esta dirección, no estarían bien determinados los límites de lo que es universalmente válido, porque: (i) si se acepta la hipótesis del continuo (CH), entonces hay fórmulas del lenguaje que resultan ser universalmente válidas; y (ii) si no se acepta la mencionada hipótesis, esa misma fórmula no resulta serlo. Es decir, la teoría de conjuntos interfiere en la validez lógica.

Por supuesto, las réplicas no se han hecho esperar. Según Shapiro (1991), (i) hay mutuas interferencias entre matemática y lógica porque no hay un fundamento desde donde pararse; (ii) no hay una distinción tajante entre las constantes lógicas y las no lógicas; y (iii) las axiomatizaciones usuales de la lógica de orden superior admiten CH. Y hay buenas razones intuitivas para adoptar CH como parte de la lógica.

La semántica estándar asigna valores a las variables de orden superior aplicando la operación *potencia* a conjuntos infinitos. Por eso, argumenta Jané (2006), las variables de segundo orden no tienen asignados sus valores en el mismo sentido en que lo tienen las variables de primer orden, ya que no hay acuerdo entre los matemáticos acerca de cuáles son todos los subconjuntos de un conjunto infinito. Claro que tal objeción supone que los únicos conceptos cuya existencia está garantizada son los que pueden expresarse en el lenguaje y hay sólo un número contable de fórmulas en un lenguaje. Por lo tanto, desde esta perspectiva, sólo es confiable la semántica de Henkin y los modelos estándar no son confiables –usan una operación (la potencia de un conjunto infinito)– que no puede describirse en el lenguaje.

La l gica de la verdad.indd 54 04/07/2014 13:47:04

Hay oraciones formuladas en LHO que separan los modelos estándar de los no estándar (tienen un valor determinado para los primeros y el contrario para los segundos). Y no hay ninguna oración de FOL que pueda hacer lo mismo. Además, ¿por qué la lógica no tendría nada que decir cuando falla la completitud? Es decir cuando no hay una superposición precisa entre lo que se puede demostrar con reglas finitarias y lo que se puede justificar de acuerdo a las estructuras que preservan verdad.

Ejercicio 6: Reflexione sobre el criterio de demarcación entre lógica y matemáticas: ¿Puede aceptarse que la matemática interfiera en la lógica?

4. El Teorema de la Indefinibilidad de la Verdad

Considérense dos lenguajes. El interrogante principal al que conduce la investigación de Tarski es si, en general, es posible hablar de la semántica del primero de ellos, usando los recursos expresivos del segundo. Si el objetivo es ofrecer un método para definir predicados de *verdad* de lenguajes particulares tomados como objeto de atención, esa definición tiene que estar formulada en un lenguaje apropiado a tales efectos. En este lenguaje se deben poder expresar las propiedades semánticas de aquel, sin incurrir en contradicción. Esto es, dado un lenguaje específico, el procedimiento debe mostrarnos *cómo* caracterizar desde un lenguaje libre de inconsistencias el predicado Tr, el cual debe ser satisfecho intuitivamente por las oraciones verdaderas del lenguaje para el cual se elabora la definición. En el caso anteriormente presentado, la definición explícita del predicado veritativo del lenguaje del cálculo de clases requiere un metalenguaje capaz de expresar relaciones entre las asignaciones de las variables del cálculo de clases (clases de clases) y fórmulas. Es evidente que el LCC por sí sólo no es capaz de expresar relaciones (clases de pares) entre clases de clases y fórmulas. Por eso, el lenguaje que hemos utilizado para dar la definición del predicado Tr posee *mayor poder expresivo* que el lenguaje del cálculo de clases mismo. En este punto, surgen directamente dos cuestiones:

La l gica de la verdad.indd 55 04/07/2014 13:47:04

(i). ¿Es posible que lenguaje y metalenguaje puedan ser el *mismo lenguaje*?

Enfaticemos que no es lo que se ha hecho hasta ahora, ya que, como hemos dicho, se ha definido la semántica del lenguaje del cálculo de clases usando los recursos de otro lenguaje con mayor poder expresivo. Y dada la definición presentada,

(ii). ¿Hay garantías acerca de la existencia de suficientes entidades como para garantizar que las cláusulas usadas en la definición explícita de *satisfacción* puedan ser parte de un lenguaje libre de inconsistencias?

De manera general, las preguntas son entonces: ¿cuáles son los recursos expresivos que debería contar un metalenguaje para poder hablar de la semántica de un lenguaje objeto? Y ¿qué garantías podemos encontrar para evitar el surgimiento de inconsistencias indeseadas dentro de nuestra definición?

4.1. Indefinibilidad de la verdad para lenguajes de orden finito

Para responder a estos interrogantes, comencemos enfatizando que Tarski usó LCC para mostrar cómo obtener una definición de *verdad* considerando lenguajes de orden finito. Esto es, tanto LCC como LCC+ son lenguajes en los cuales el número de tipos de las variables puede ser mayor que 0, incluyendo la posibilidad de tener variables de distinto tipo, pero las variables de tipo más alto siempre son de orden finito. Usando terminología actual, diríamos que se tratan de lenguajes de segundo y tercer orden respectivamente. Esto garantiza que siempre sea posible encontrar un ML dentro de la jerarquía de lenguajes de tipo finito.[21] Ahora bien, dado el lenguaje de la teoría de tipos, los interrogantes que guían este apartado son:

(i). ¿Puede siempre definirse su predicado veritativo aplicando el método de Tarski?
(ii). Y suponiendo que haya una respuesta afirmativa, ¿puede esa definición estar formulada en un lenguaje del mismo tipo?

21. Tarski utilizó teoría de tipos finitos con el propósito de evitar complicaciones russellienas. En la actualidad, usaríamos ZF.

La l gica de la verdad.indd 56 04/07/2014 13:47:04

Con respecto a la primera cuestión, la respuesta es positiva. Tarski muestra que siempre es posible dar una definición del predicado veritativo de un lenguaje de tipo finito n desde un lenguaje de tipo n + 1. Esto es, si nos preguntamos sobre las condiciones de aplicación de los procedimientos empleados en las definiciones de verdad material y formalmente correctas, Tarski (1935: 406) nos responde lo siguiente:

> En base al metalenguaje es posible formular definiciones metodológicamente correctas y materialmente adecuadas de los conceptos semánticos si, y sólo si, en el metalenguaje intervienen variables de tipos lógicos de nivel superior al de todas las variables del lenguaje que constituye el objeto de la investigación.

Dicho de otra manera, y al igual que ocurrió en el punto anterior cuando consideramos el lenguaje del cálculo de clases, el ML no podrá tener el mismo poder expresivo que el lenguaje objeto. El resultado limita sus capacidades expresivas: sus propios predicados veritativos no son definibles dentro de los mismos usando sus propios recursos. Esto significa acotar los recursos de auto-representación. Esto es, si se cumplen ciertas condiciones expresivas, la necesidad de representar todas las verdades de un lenguaje da lugar al surgimiento de una jerarquía de lenguajes, en donde en cada nivel de la misma se poseen más recursos expresivos que en el nivel inmediato inferior, y en donde en cada nivel sería capaz de representar el predicado veritativo del nivel precedente. En este sentido, afirma Tarski:

> *the condition of the "essential richness" of the meta-language proves to be, not only necessary, but also sufficient for the construction of a satisfactory definition of truth (1944).*

Es decir, si la verdad es transparente y tal transparencia es expresada por medio del conjunto completo de los bicondicionales T del lenguaje de LCC, si ese bicondicional es clásico y no hay revisión de sus leyes lógicas, las paradojas semánticas nos obligan a abandonar el proyecto de desarrollar lenguajes semánticamente autosuficientes. No hay mentirosos ni oraciones de Curry en el lenguaje. Así, Tarski propone expresar ese conjunto de bicondicionales T desde un lenguaje expandido LCC+. Con esta restricción, no es difícil mostrar cómo el nuevo predicado cumple Captura y Liberación para las oraciones LCC. Pero, resulta entonces que LCC no es semánticamente autosuficiente: no puede consistentemente describir el comportamiento de su propio predicado veritativo.

La l gica de la verdad.indd 57 04/07/2014 13:47:04

Pero no todo es limitación. Siempre es posible dar una definición del predicado veritativo para cualquiera de los lenguajes de la jerarquía de tipos finito, ya que siempre estamos preparados para ascender en la jerarquía de lenguajes. De lo contrario, existirían lenguajes para los cuales su predicado de verdad no es expresable. Tarski muestra que este no es el caso. Su método nos garantiza que para cualquier nivel de la jerarquía, hay una definición materialmente adecuada y formalmente correcta del predicado veritativo de ese lenguaje siempre contemos con un lenguaje con recursos expresivos suficientes como para hablar desde un nivel superior de la jerarquía.[22]

Por supuesto, subrayo que este resultado está en completa armonía con lo presentado en el punto anterior respecto de la definición tarskiana de verdad para el lenguaje del cálculo de clases. Recordemos que en ese caso, sus cuantificadores y variables toman como valores todas las subclases de la clase de todos los individuos del universo. En la jerarquía de tipos finitos, este lenguaje se ubica en el segundo de los niveles. Su semántica, tal como queda de manifiesto cuando se presenta la definición explícita de *satisfacción* a partir de la cual se define su predicado veritativo, tiene que ser expresada en un lenguaje de tercer nivel. Y por supuesto, este procedimiento podría iterarse toda vez que se lo necesite, para obtener definiciones de predicados veritativos de cada uno de los lenguajes de la jerarquía de tipo finitos.

De manera general, podemos usar el siguiente principio que resulta plausible para lenguajes ubicados en la jerarquía finita de tipos para cualquier ordinal arbitrario de n:

Principio de Optimismo Semántico[23]

Dado cualquier lenguaje de tipo finito n, siempre es posible generar una definición tarskiana de verdad desde un lenguaje ubicado en la jerarquía cuyo tipo es al menos n+1.

22. Nótese que diferencia de lo que usualmente hacemos en nuestros días, la jerarquía que Tarski presenta en 1935 no es el resultado de considerar lenguajes con cuantificadores irrestrictos que van incluyendo más y más predicados veritativos, sino lenguajes con cuantificadores restrictos que van siendo cada vez más inclusivos.

23. El principio de Optimismo Semántico es defendido por Rayo y Linnebo. Cfr. Rayo (2006) y Rayo y Linnebo (2012).

La l gica de la verdad.indd 58 04/07/2014 13:47:04

La imagen que surge es la de una serie de definiciones de predicados veritativos que se extiende indefinidamente. Cada vez que sea necesario, es posible agregar una definición de *verdad* para un lenguaje más alto en la jerarquía.

No obstante, enfaticemos que nuestro optimismo semántico ha encontrado un límite: Tarski muestra que, en general, no es posible que coincidan el orden del lenguaje para el cual se elabora la definición y el orden del lenguaje desde el cual se la elabora. El lado negativo del resultado de Tarski consiste en advertir que bajo ciertas condiciones es imposible dar una definición del predicado veritativo de un lenguaje de tipo n desde un lenguaje de tipo n. El logro de Tarski (1935: 247) es asombroso: su famoso *Teorema de la Indefinibilidad de la Verdad* muestra que ambos lenguajes coinciden y poseen cierta capacidad expresiva, la definición del predicado veritativo genera inconsistencias.

Ejercicio 7: Evalúe el principio de optimismo semántico en relación con el ideal de tener un lenguaje semánticamente autosuficiente.

4.2. Indefinibilidad de la verdad para lenguajes de tipo infinito

Hasta aquí, en los lenguajes de tipo finito, su tipo es el mayor número entero positivo n tal que el lenguaje tiene variables de tipo n. Pero, ¿existe la posibilidad de desarrollar un lenguaje para el cual no haya un tipo de variable que sea el mayor? Esto es, dado cualquier nivel de la jerarquía de tipos, los lenguajes de tipo finito tienen recursos expresivos suficientes como para hablar acerca de ese nivel y de todos los niveles inferiores a ese nivel. Pero si no hay un límite en los niveles a los que se pueda ascender, ¿habrá algún lenguaje desde el cual se pueda hablar de todos los lenguajes de tipo finito? En este punto, puede implementarse una drástica ampliación de los recursos expresivos admitiendo la posibilidad de que un lenguaje cuente con medios expresivos suficientes como para poseer una infinidad de variables de distinto tipo. Esto es, si no hay un n tal que n es el mayor, entonces el lenguaje es de orden infinito. Pero, ¿por qué deberíamos admitir lenguajes de tipo infinito? Linnebo y Rayo (2012) nos recuerdan la respuesta de Gödel: "porque nosotros podemos". Desde el punto de vista de las matemáticas y en particular bajo la suposición de que los lenguajes son cierto tipo de conjuntos, podemos

La l gica de la verdad.indd 59 04/07/2014 13:47:04

perfectamente admitir un lenguaje así que sea la unión del todos los lenguajes de tipo finito.

Ahora bien, es justamente para los lenguajes de orden infinito, a los que Tarski denomina *lenguajes de la teoría general de clases* LGTC, para los que Tarski formula su teorema limitativo. Veamos su resultado. Considérese el lenguaje de la teoría general de clases (LGTC). Como hemos visto, este lenguaje posee variables de infinitos tipos. La pregunta es ¿puede construirse un predicado en LGTC+ (un lenguaje del mismo orden que LGTC, pero con recursos expresivos suficientes como para hablar de las fórmulas de LGTC) que verifique la convención-T para las oraciones de LGTC? En los lenguajes de tipo finito, tenemos todo lo que necesitamos para dar una definición de *satisfacción*. En particular, la relación de *satisfacción* para cualquier nivel de la jerarquía puede ser siempre encontrada en la jerarquía misma. Esto nos proporciona garantías acerca de que todos los objetos sobre los que se cuantifica en la definición existen en la mencionada jerarquía. Sin embargo, en el caso de LGTC, la relación de *satisfacción* no puede estar en la jerarquía de tipos finitos. Por eso, el teorema de Tarski muestra que no hay posibilidad de construir un predicado en LGTC+ que pruebe todas las instancias de la convención T para la totalidad de las oraciones de LGTC.[24]

Tengamos en cuenta que la convención T para un predicado veritativo 'Tr' de oraciones para un lenguaje de tipo infinito establece que son teoremas del sistema deductivo de LGTC+ todas las oraciones de la forma 'Tr('A') si y sólo si A' . El resultado de Tarski (1935: 247) establece que:

Teorema 1:

(α) Si 'Tr' es un predicado de expresiones definido en LGTC+, será posible derivar dentro del cálculo deductivo de LGTC+ la negación de una de las oraciones de la forma 'Tr('A') si y sólo si A'.

(β) Si el cálculo deductivo de LGTC+ es consistente, entonces no habrá ningún predicado definido en LGTC+ que satisfaga la convención T.

24. Inmediatamente veremos que hace falta hacer una especificación sobre este resultado.

La l gica de la verdad.indd 60 04/07/2014 13:47:04

El teorema establece que el conjunto de las oraciones verdaderas de LGTC no es definible en LGTC+. Su segunda parte es una consecuencia trivial de la primera. Los detalles dependen de la forma que adopten LGTC y LGTC+.

Cabe destacar que en su famoso *Postscript* al artículo de 1935, Tarski trabaja con lenguajes de orden transfinito y muestra que si hay un ordinal límite sobre los órdenes de las variables, la verdad es definible en un lenguaje donde no hay tal límite o donde el límite es más alto.

> In fact, the setting up of a correct definition of truth for languages of infinite order would in principle be possible provided we had at our disposal in the metalanguage expressions of higher order than all variables of the language investigated (Tarski, 1935: 272).

Específicamente, si se adopta como parte de los recursos expresivos del lenguaje en el cual se formula la definición de *verdad* una teoría de tipos transfinitos, la relación de *satisfacción* para LTGC será una relación cuya existencia está garantizada por la teoría. Se le podrá dar un orden o tipo en la jerarquía en la medida en que al ser la metateoría lo suficientemente potente, siempre habrá una relación entre fórmulas y secuencias formadas por una secuencia de individuos, secuencias de clases de individuos, secuencias de clases de clases de individuos, etc. Esto es, la relación de *satisfacción* siempre podrá ser definida como una entidad dentro de la jerarquía de tipos transfinitos. Y en la medida que exista un ordinal límite, la verdad resulta definible (cfr. Rayo, 2006; Rayo y Linnebo, 2012).

Nuevamente, Linnebo y Rayo (2012) nos llaman la atención acerca de un principio intuitivo que parece plausible aceptar.

> Principio de Unión:
> Para cualquier ordinal límite λ, suponemos que estamos preparados para tolelar lenguajes de orden β para todo $\beta < \lambda$. Entonces, deberíamos también estar preparados para tolerar lenguajes de orden λ sobre la base de que ellos han sido construidos enteramente usando vocabulario que ha sido previamente declarado legítimo.

Por supuesto, se advierte cierta tensión entre el *principio de unión*, el *principio de optimismo semántico* y el resultado de Tarski. El primero parece motivar la idea de que hay un lenguaje que es la unión de todos los lenguajes. El segundo que la definición tarskiana del predicado veritativo de este lenguaje puede darse. Pero, el *Teorema de Tarski* implica que si este lenguaje existiera, su predicado veritativo

La l gica de la verdad.indd 61 04/07/2014 13:47:04

no podría definirse, ya que no contaríamos con ningún lenguaje suficientemente expresivo como para caracterizar su extensión.

Un modo alternativo de ver las limitaciones expresivas tarskianas nos pide que adoptemos la siguiente suposición: que las interpretaciones de las expresiones no lógicas sean objetos. Un lenguaje semánticamente auto-suficiente debería ser capaz de hablar de todas las interpretaciones de sus expresiones no lógicas. Más aún, las propiedades lógicas de sus expresiones, tales como los vínculos inferenciales entre sus oraciones, dependen de que tal capacidad no sea restringida. De lo contrario, nuestra noción intuitiva de validez (verdad en todo caso) podría no corresponder con nuestra noción tarskiana de validez (verdad en todo modelo). Es cierto que, para los lenguajes de primer orden, Kreisel ha ofrecido un argumento [*squeezing argument*] que muestra que la prueba de completitud puede ser vista como un puente entre el abismo que separa la noción intuitiva de *consecuencia* y la noción modelo teórica caracterizada en términos de verdad en un modelo (Kreisel, 1967). Pero no conocemos otra garantía que la ofrecida por Kreisel respecto de la coincidencia entre el plano intuitivo y el plano matemático con el que analizamos la transmisión de verdad. Y en particular, para los lenguajes de orden superior, al no cumplirse la completitud, el argumento de Kreisel no se aplica. Por eso, que seamos capaces de hablar de *absolutamente todas las interpretaciones* de las expresiones no lógicas de L parece ser una condición que nuestra teoría de la interpretación de los lenguajes tiene que cumplir. Sin embargo, toda vez que se fije un rango determinado para los cuantificadores de un lenguaje, este procedimiento nos habilitará a definir *un nuevo objeto* que no esté bajo el alcance de los cuantificadores del lenguaje y establecerá que la cuantificación no era irrestricta en absoluto. Para apreciar la fuerza de este punto, conviene introducir la siguiente prueba de Williamson (2003):

Supongamos que L es un lenguaje de primer orden cuyos cuantificadores son interpretados de manera irrestricta. Sea 'P' un predicado monádico de L. Sea 'F' cualquier predicado significativo del metalenguaje. Según Williamson, debe ser posible interpretar P como significando F. Esto es,

(1). $\forall x$ (i_F es una interpretación bajo la cual 'P' se aplica a x ssi Fx)

Por ejemplo, si el metalenguaje es el español, un caso de este tipo consiste en '$\forall x$ (i_F es un interpretación bajo la cual 'P' se aplica a x ssi x es un hombre)', donde '$\forall x$' tiene un rango irrestricto.

La l gica de la verdad.indd 62 04/07/2014 13:47:04

Dada la suposición de que las interpretaciones son objetos, parece razonable permitir definir un nuevo predicado 'R' tal que

(2). ∀x (Rx ssi x no es una interpretación bajo la cual 'P' se aplica a x)

Si en (1), 'R' reemplaza a 'F' y al mismo tiempo, aplicamos la definición de 'R' en (2) obtenemos:

(3). ∀x (i_R es una interpretación bajo la cual 'P' se aplica a x ssi x no es una interpretación bajo la cual 'P' se aplica a x)

Ya que `∀x´ en (3) es absolutamente irrestricto, podemos instanciarlo y obtener:

(4). i_R es una interpretación bajo la cual P se aplica i_R ssi i_R no es una interpretación bajo la cual P se aplica i_R

Lo cual es contradictorio. Este absurdo se ha obtenido, aplicando lógica clásica, bajo la suposición de que hay un lenguaje con cuantificación irrestricta y que las interpretaciones caen bajo el alcance de esos cuantificadores. Por supuesto, nuevamente podríamos ser semánticamente optimistas: el resultado no implica que no seamos capaces de hablar de las interpretaciones en absoluto. Simplemente que para hacerlo, tal como lo hicimos en el caso de LCC, deberíamos ascender de orden: para poder cuantificar sobre *todas* las interpretaciones de un lenguaje de primer orden habría que adoptar recursos cuantificacionales de segundo orden.[25]

Ejercicio 8: Compare la jerarquía de interpretaciones que surge a partir del argumento de Williamson con la jerarquía Tarskiana de predicados veritativos.

Ejercicio 9: Evalúe el enfoque jerárquico defendido por Tarski.

25. Por supuesto, un recurso alternativo consiste en adoptar cuantificación plural: hablar de todos los objetos sin reunirlos en una entidad que los agrupe. Sin embargo, como puede verse en Rayo (2006), el recurso a las jerarquías también resulta inevitable, lo cual significa que este recurso tampoco sirve para lograr un lenguaje que sea semánticamente autosuficiente.

La l gica de la verdad.indd 63 04/07/2014 13:47:05

4.3. Indefinibilidad de la verdad para la aritmética

Por razones expositivas vinculadas a los usos en nuestros días de tales resultados, conviene dar una idea de la prueba del teorema recurriendo a un caso más familiar. Sea L el lenguaje de la aritmética. Esto es, L cuenta con recursos expresivos como para hablar de todas las funciones y relaciones recursivas. Bajo esta condición, L cuenta con suficientes recursos como para hablar de su propia sintaxis, ya que puede demostrarse que el conjunto de oraciones de L es recursivo. Nótese que no hay nada de especial en este lenguaje. Simplemente, L tiene capacidad auto-referencial. Usualmente, se describe esta capacidad expresiva como el recurso para gödelizar la propia sintaxis. A grandes rasgos, esto simplemente quiere decir que en L, contamos con un numeral para nombrar cada una de las expresiones de L. En particular, L tiene suficientes recursos como para codificar númericamente sus oraciones: a cada oración le corresponde un número de Gödel que la codifica. Sea '$\mathbf{A}$' representa el número de Gödel de $\mathbf{A}$.[26] Nótese que la relación de prueba entre un conjunto de oraciones y una oración de L también es expresable númericamente dentro de L. Un dato central con el que contamos es que en L somos capaces de probar siguiente Lema Diagonal:

Lema Diagonal: Sea T una teoría que tiene recursos expresivos como para hablar de todas las funciones y relaciones recursivas. Entonces, para cualquier fórmula abierta $\mathbf{F}(\mathbf{y})$, hay una oración G tal que $\mathbf{T} \vdash \mathbf{G} \leftrightarrow \neg \mathbf{F}$ ('G').[27]

Teorema de la indefinibilidad de la verdad aritmética

El conjunto de las oraciones verdaderas de L es indefinible en L. Supongamos, por absurdo, que fuera definible; entonces contaríamos en L con un símbolo formalmente definido 'Tr', capaz de expresar el predicado veritativo de L. Es decir, usando los recursos de prueba de T, deberíamos ser capaces de probar, para cada oración A de L, un bicondicional T:

26. Para probar la incompletitud de la aritmética, Gödel elaboró un procedimiento general para expresar todas las nociones sintácticas dentro de la teoría de números.
27. En términos intuitivos, se podría decir que hemos encontrado una fórmula en el lenguaje de la aritmética que se atribuye el cumplimiento de una condición cualquiera a sí misma.

La l gica de la verdad.indd 64 04/07/2014 13:47:05

(T) Tr (‘A’) si y sólo si A.

Pero, por el lema diagonal, seremos capaces de probar que para alguna fórmula A de L, A si y sólo si ¬ F (‘A’), donde ‘¬ F’ es un predicado de la aritmética tal que F(‘A’) si y sólo si ¬ F (‘A’). Pero, asumiendo lógica clásica, este teorema es la negación de la oración T correspondiente para A. Por lo tanto, si se asume que ‘Tr’ es una expresión que define la clase de las oraciones verdaderas de L, la negación de una oración-T será un teorema de T, lo cual es absurdo y permite concluir que, bajo las condiciones mencionadas, el conjunto de oraciones verdaderas de L es indefinible.

Sólo para enfatizar: un punto crucial de este argumento es el recurso al lema de diagonalización. Si forma parte del aparato deductivo del lenguaje la posibilidad de probar como teorema el lema de diagonalización, si coinciden el lenguaje para el cual se elabora la definición del predicado de verdad y desde el cual se la elabora, no hay manera, si queremos evitar el surgimiento de contradicciones, de expresar la extensión del predicado veritativo dentro de ese lenguaje. Este resultado afecta la posibilidad de hablar acerca de la verdad aritmética dentro de la aritmética, ya que forma parte de los recursos deductivos de la misma probar el lema de diagonalización.

Ejercicio 10: Sea M_{PA} la oración del mentiroso que afirma de sí misma que no es aritméticamente verdadera. ¿Cómo analizaría esta oración dentro del enfoque tarskiano?

Conclusión

En suma, hemos visto que Tarski ha diseñado un método para dar una caracterización extensional y formalmente correcta del concepto de *verdad*, para una amplia clase de lenguajes formales. Su definición nos muestra cómo especificar las condiciones de verdad para cada una de las oraciones de los mismos: adoptar una lenguaje con más recursos expresivos de manera tal de poder describir la relación de satisfacción sin incurrir en inconsistencias. Claro que, como hemos visto, al

La l gica de la verdad.indd 65 04/07/2014 13:47:05

ofrecer el método, ha mostrado límites a la posibilidad de representar, dentro de un lenguaje con ciertos recursos expresivos, su propio predicado veritativo. El punto se ha enfatizado usando la jerarquía finita de tipos. Dado cualquier punto n de la jerarquía, para ofrecer una caracterización materialmente adecuada y formalmente correcta de su predicado veritativo, debemos ascender en la jerarquía. Y si consideramos un lenguaje de tipo infinito y suponemos que no hay ningún punto más alto al cual ascender, su predicado veritativo se vuelve indefinible.

La l gica de la verdad.indd 66 04/07/2014 13:47:05

Apéndice

Como hemos visto a lo largo del presente capítulo, Tarski optó por dar una definición semántica de verdad. En este apéndice, ofrezco una axiomatización de sus ideas conocida como T(PA). Tomaré la aritmética de primer orden como base y le agregaré axiomas que intenten capturar el funcionamiento axiomático del predicado veritativo tarskiano. Sea L_{PA} el lenguaje de primer orden de la aritmética con símbolos suficientes como para expresar todas las funciones recursivas primitivas. Sea L_T una expansión de L_{PA} resultante de agregar un nuevo predicado primitivo Tr. Como antes L_{PA} puede ser completamente gödelizado, es decir, todas sus expresiones se pueden representar por medio de un número de Gödel. Sea '**A**' el número de Gödel de **A**. Sea PA^1 la aritmética de Peano expresada en L_{PA}. Para formular los axiomas necesarios para caracterizar el comportamiento del predicado Tr, necesitamos algunos predicados en L_{PA} que hablen de ciertas propiedades de expresiones de L_{PA}. Sea $Sent_L(x)$ una fórmula que expresa en L_{PA} la propiedad de ser una oración de L_{PA}. Similarmente, $At_L(x)$ significa que x es una oración atómica de L_{PA} y Ver(x) que x es una oración atómica verdadera de L. Si A es una fórmula con una variable libre, el término <A(dot(x))> se construye a partir de las expresiones que permiten expresar las funciones recursivas primitivas. <A(dot(x))> es un término de función, con la variable *x* libre, cuyo significado es 'el resultado de sustituir el numeral del número x por todas las variables libres en la fórmula **A**'. La notación *dot* ha sido desarrollada por Feferman (1991) como un recurso para cuantificar desde afuera en contextos donde aparece <... >.

El *Primer Teorema de Gödel* impide que tengamos una axiomatización completa expresada en una teoría de primer orden. A pesar de lo cual lo que se espera de una teoría de la verdad es que la misma sea capaz de demostrar como teorema *todos los principios* que involucran al predicado veritativo. Y claro, la discusión es acerca de cuáles son estos principios. La intuición es que hay que agregar a la teoría que se tome como base ciertos axiomas que permitan demostrar teoremas que hablen de la interacción entre el predicado veritativo y los operadores lógicos. Tomemos PA^1 como base y agreguemos a la misma no sólo las instancias restringidas de bicondicionales T aplicados a las fórmulas de L_{PA}, sino también ciertos axiomas sobre tal interacción. Sean estos axiomas los siguientes:

La l gica de la verdad.indd 67 04/07/2014 13:47:05

T(PA)1 $\forall x_1, ..., \forall x_n ((At_L(x) \supset Ver(\text{`}(dot(x_1),..., dot(x_n)\text{`}) \leftrightarrow Tr(x)$

T(PA)2 $\forall x (Sent_L(x) \supset (Tr(\neg \text{`}x\text{'}) \leftrightarrow \neg Tr(\text{`}\varphi\text{'}))$

T(PA)3 $\forall x \forall y (Sent_L(x) \wedge (Sent_L(y) \supset (Tr(\text{`}x \wedge y\text{`}) \leftrightarrow (Tr(\text{`}x\text{'}) \wedge Tr(\text{`}y\text{'}))$

T(PA)4 $\forall x (Sent_L(x) \wedge Sent_L(y) \supset (Tr(\text{`}x \supset y\text{'}) \supset (Tr(\text{`}x\text{'}) \supset Tr(\text{`}y\text{'}))$

T(PA)5 $\forall x (Sent_L(x) \supset (Tr(\text{`}\forall x A(x)\text{'}) \leftrightarrow \forall x Tr(\text{`}A(dot(x))\text{'}])$

El primer axioma es una versión restringida del esquema T para todas las fórmulas de L_{PA}. Los axiomas restantes aseguran que el predicado veritativo conmute de manera clásica con los operadores lógicos. En particular, el axioma 4 dice que una oración universalmente cuantificada perteneciente a L_{PA} es verdadera si y sólo si todas sus instancias numéricas son verdaderas.[28] Al igual que lo que hicimos en el caso de TD, podemos permitir también que la inducción matemática se aplique a fórmulas del lenguaje L_T. La teoría axiomática resultante es conocida como T(PA). La misma tiene ciertas virtudes que TD no tiene. En primer lugar, prueba un primer *Principio de Reflexión global* para PA^1: si una fórmula es demostrable en PA^1, es declarada verdadera dentro de T(PA).

Principio de Reflexión $\forall x (Sent(x) \& Bew_{PA}{}^1(x) \supset Tr(x))$

Los principios de reflexión son llamados de esta manera porque no se obtienen directamente de PA^1, sino reflexionando acerca del hecho de que estamos dispuestos a reconocer como verdadera a la mencionada teoría. Nuestra disposición a aceptar una teoría nos conduce a afirmar que si una fórmula es demostrable dentro de la misma, es verdadera. La aritmética no tiene capacidad probatoria para su propio principio de reflexión. Pero parece razonable admitir que una axiomatización adecuada de la verdad aritmética debería incluirlo como parte de lo que se afirma dentro de la teoría.[29]

28. Nótese la semejanza entre este axioma y la fórmula de Barcan de la lógica modal de primer orden.

29. Por supuesto, limitaciones vinculadas al Teorema de Löb impiden que el mismo requerimiento se itere sobre T(PA). Esta teoría no puede probar su propio principio de reflexión. De esta manera, el camino parece ser jerárquico: adoptar una jerarquía de teorías capaces de probar principios de reflexión para los niveles inferiores.

La l gica de la verdad.indd 68 04/07/2014 13:47:05

Por el Primer Teorema de Incompletitud de Gödel, si PA^1 es consistente, no puede probar la oración de Gödel.

G: $\exists y\ Bew_{(PA^1)}(\text{`G'},y)$

Pero G es verdadera. Entonces G verdadera, pero no probable. Por eso, PA^1 es incompleta. Y ya que se puede demostrar en PA que G es equivalente a Con.

Con: $\neg\exists y\ Bew_{(PA^1)}(\text{`0=1'}, y)$

dado que G no es probable, Con tampoco lo es, aun siendo verdadera, tal como establece el Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel. T(PA) tiene la virtud de demostrar como teorema la oración de Gödel de PA^1 y por lo tanto, su consistencia. Ambos teoremas parecen deseables de ser obtenidos dentro de una axiomatización de la verdad aritmética. No obstante, el incremento en la capacidad de demostrar teoremas respecto de la aritmética puede tener un costo. Es claro que T(PA) no es una extensión conservativa respecto de PA^1. Que una teoría de la verdad sea conservativa respecto de PA^1 está vinculado con la intuición según la cual la verdad aritmética superviene en la aritmética.[30] Es interesante notar que la no conservatividad de T(PA) es el resultado de haber permitido aplicar inducción matemática a fórmulas que contienen el predicado veritativo. Si este recurso es eliminado, la teoría resultante (conocida como T(PA)I) es conservativa respecto de PA^1.[31] De esta manera, se asegura que los principios de la verdad que se han agregado son inocuos, es decir, que no tienen poder explicativo acerca de la teoría a la cual se aplican.

A pesar de todo lo anterior, ni T(PA) ni T(PA)I pueden expresar la verdad de sus propios teoremas. Esto es, son teorías que al no poseer axiomas que regulen el funcionamiento de las iteraciones del predicado veritativo, no son capaces de

30. Shapiro y Ketland sostienen que los deflacionistas sólo deberían adoptar axiomatizaciones conservativas: si la verdad no tiene poder explicativo, no debería permitirnos probar más teoremas que los que ya pueden probarse en la teoría a la que se agregan los axiomas que regulan al predicado veritativo. Field, en cambio, sostiene que la conservatividad o no de una teoría nada tiene que ver con el deflacionismo. Probar teoremas no es una propiedad substancial. Por eso es perfectamente admisible adoptar T(PA) y ser deflacionista.
31. Este resultado es probado en Halbach (1999).

La l gica de la verdad.indd 69 04/07/2014 13:47:05

representar como verdaderas, las fórmulas que ellas prueban. En este sentido, podríamos explorar la posibilidad de liberarnos de la restricción de no permitir iteraciones del predicado verdad y adoptar la segunda estrategia. Un intento natural para "completar" estas teorías podría consistir en agregar a las mismas el siguiente axioma de iteración:

$$\forall x\,(\mathrm{Sent}(x) \supset \mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}(x)) \supset \mathrm{Tr}(x)))$$

Desafortunadamente, este axioma es incompatible con los de T(PA), ya que conduce a inconsistencia. Esto puede demostrarse fácilmente aplicando el Lema diagonal. Empleando el axioma 2 de T(PA) se obtiene una contradicción dentro de la teoría extendida con el axioma iterativo.[32] Por eso, si se desea tener una teoría axiomática de la verdad que demuestre teoremas que regulen el comportamiento iterativo del predicado veritativo de la aritmética, el camino tiene que ser otro.

Bibliografía

Bays, T. (2001): "On Tarski on Models", en *Journal of Symbolic Logic*, 66.

Beall, J. C. y Restall, G. (2000): "Logical Pluralism", en *Australasian Journal of Philosophy*, 78.

Etchemendy, J. (1988): "Tarski on Truth and Logical Consequence", en *Journal of Symbolic Logic,* 53.

Feferman, S. (1991): "Reflecting on Incompleteness", en *Journal of Symbolic Logic,* 56 (1).

Gómez-Torrente, M. (1996): "Tarski on Logical Consequence", en *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37.

— (2009): "Rereading Tarski on Logical Consequence", en *Review of Symbolic Logic*, 2.

Halbach, V. (1994): "A System of Complete and Consistent Truth", en *Notre Dame Journal of Formal Logic,* 35.

32. Para una prueba rigurosa, ver Halbach (1994).

La l gica de la verdad.indd 70 04/07/2014 13:47:06

— (1999): "Conservative Theories of Classical Truth", en *Studia Logica,* 62.
Jané, I (2006): "Higher-Order Logic Reconsidered", en Shapiro, S. (comp.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford, Oxford University Press.
Kreisel, G. (1967): "Informal Rigour and Completeness Proofs", en Lakatos, I. (ed.), *Problems in the philosophy of mathematics*, Amsterdam, North-Holland.
Mancosu, P. (2006): "Tarski on Models and Logical Consequence", en Ferreirós, J. y Gray, J. J. (eds.), *The Architecture of Modern Mathematics*, Oxford, Oxford University Press.
Mancosu, P. (2010): "Fixed vs variable-domain interpretations of Tarski's account of logical consequence", en *Philosophy Compass*, 5.
McGee (1991): *Truth, Vagueness and Paradox*, Indiannapolis, Hackett.
Milne, P. (1999): "Tarski on Truth and its Definition", en *Proc. of the Arist Society,* 9.
Ramsey, F. (1991): *On Truth*, Dordrecht, Kluwer A. Pu.
Rayo, A. (2006): "Beyond Plurals", en Rayo, A., y Uzquiano, G. (eds.), *Absolute Generality,* Oxford, Oxford University Press.
Rayo, A. y Linnebo, O. (2012): "Hierarchies Ontological and Ideological", en *Mind, 121.*
Shapiro, S. (1991): *Foundations without Foundationalism, Oxford,* Clarendon Press.
Tarski, A. (1935): "The Concept of Truth in Formalized Languages", en Tarski, A. (1956)
— (1944): "The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics", en *Philosophy and Phenomenological Research,* Vol IV. Reimpreso en *Cuadernos de Lógica,* Buenos Aires, Opfyl, 1962.
Tarski, Alfred, 1956, *Logic, Semantics, Metamathematics*: papers from 1923 to 1938, Translated by J. H. Woodger, Oxford: Oxford University Press.
Williamson, T. (2003): "Everything", en *Philosophical Perspectives,* vol. 17

Lecturas sugeridas

Lógica Clásica

Boolos, G., Burgess, J. y Jeffrey, R. (2007): *Computability and Logic*, Cambridge, Cambridge University Press, caps. 10 y 11.

La l gica de la verdad.indd 71 04/07/2014 13:47:06

Hodges, W. (1984): "Elementary Predicate Logic", en Gabbay, D. y Guenthner, F. (eds.), Handbook of Philosophical Logic, Vol 1. Springer Kluwer, Dordrecht.
Hodges, W. (1997): *A Shorter Model Theory*, Cambridge, Cambridge University Press.

Consecuencia Lógica

Etchemendy, J. (1999): *The Concept of Logical Consequence*, Stanford, CSLI Publications.
Gomez Torrente, M. (2000): *Forma y Modalidad*, Buenos Aires, Eudeba.

Paradojas semánticas

Beall, J. C. (2007): *Revenge of the Liar*, Oxford, Oxford University Press.

Deflacionismo

Barrio, E. (1998): *La Verdad Desestructurada*, Buenos Aires, Eudeba.
Horwich, P. (1990): Truth, Londres, Blackwell.

Deflacionismo y conservatividad

Field, H. (1999): "Deflating the Conservativeness Argument", en The Journal of Philosophy, 96.
Ketland, J. (1999): "Deflationism and Tarski's Paradise", en Mind, 108.
Shapiro, S. (1983): "Conservativeness and Incompleteness", en Journal of Philosophy, 80.
— (1998): "Proof And Truth: Through Thick and Thin", en Journal of Philosophy, 95.

La l gica de la verdad.indd 72 04/07/2014 13:47:06

Definiciones Tarskianas de Verdad:

Mancosu, P. (2010): *The Adventure of Reason*, Oxford, Oxford University Press.
Patterson, D. (ed.) (2008): *New Essays on Tarski and Philosophy*, Oxford, Oxford University Press.

Teorema de Tarski

Boolos, G., Burgess, J. y Jeffrey, R. (2007): *Computability and Logic*, Cambridge, Cambridge University Press.

Plurales y lenguajes de orden superior:

Boolos, G. (1984): "To be is to be the value of a variable (or to be some values of some variables)", en *Journal of Philosophy*, 81.
— (1985): "Nominalist Platonism", en *The Phil Review*, XCIV.
Linnebo, O. (2010): "Pluralities and Sets", en *Journal of Philosophy*, 107.
Rayo, A. y Uzquiano, G. (eds.), *Absolute Generality*, Oxford, Oxford University Press.

La l gica de la verdad.indd 73 04/07/2014 13:47:06

Capítulo 2
Teoría de Puntos Fijos de Kripke

Paula Teijeiro y Damián E. Szmuc

En este capítulo el lector será introducido en la teoría de Puntos Fijos desarrollada por Saul Kripke en su famoso *Outline of a Theory of Truth* de 1975. En primer lugar, motivamos la utilización de la teoría que nos ocupa en relación a ciertas falencias de la concepción tarskiana de la verdad. Para ello, discutimos la noción de infundación y sus vínculos con el surgimiento de paradojas. En segundo lugar, presentamos tanto conceptual como formalmente la teoría de Kripke. A continuación, llevamos a cabo una discusión de varios de sus componentes centrales: la interpretación del nuevo valor semántico introducido, de los distintos esquemas de valuación que pueden ser utilizados en ella, y de los distintos puntos fijos por los que se puede optar para conformar la extensión del predicado veritativo. Luego, juzgamos la medida en que la teoría de Kripke es una teoría de la verdad, dado el hecho de su comportamiento insatisfactorio respecto del Esquema-T. Evaluamos, asimismo, un posible regreso del "metalenguaje" y el fenómeno de las revanchas. En el apéndice se presentan y comentan las características principales de algunas axiomatizaciones de la teoría de Kripke.

La l gica de la verdad.indd 75 04/07/2014 13:47:06

1. Crítica a las jerarquías tarskianas

La teoría de la verdad como Punto Fijo de Saul Kripke (1975), cuyos lineamientos centrales fueron expuestos independientemente por Martin y Woodruff (1975), tiene como objetivo superar los obstáculos conceptuales y técnicos planteados por el enfoque tarskiano presentado en el capítulo precedente.

El primero de ellos es que el concepto de verdad no se encuentra unificado, sino estratificado, de modo que ninguna oración contiene *el* predicado veritativo, sino sólo *un* predicado veritativo de la jerarquía.[33] Nunca podemos decir *la* verdad, sino una verdad relativa a un lugar de la jerarquía. Contrario a este hecho, cuando utilizamos corrientemente la expresión 'verdadero' no parecen estar implicadas en nuestros enunciados limitaciones expresivas de este orden. Asumir la existencia de dichas limitaciones nos lleva a una concepción de las paradojas, y de la infundación en general, con consecuencias antiintuitivas.

En su lugar, la propuesta de Kripke es utilizar el concepto de infundación para dar cuenta de un fenómeno más amplio, que es sólo condición necesaria para las antinomias.

1.2 Infundación

Para comenzar con el tratamiento de la infundación, llamaremos *infundada* a toda oración o conjunto de oraciones cuyo valor semántico depende de oraciones que contienen –irreductiblemente– nociones semánticas. Uno de los aportes fundamentales de Kripke es haber distinguido entre dos categorías de oraciones infundadas: las que son *inherentemente infundadas* y las que son *empíricamente* infundadas.

33. A la luz de la paradoja presentada por Yablo (1985; 1993) , podría agregarse que un requisito para que el enfoque tarskiano de jerarquías logre su cometido de eliminar la infundación la jerarquía debe estar "bien fundada". En lo que sigue la exposición del concepto de fundación elucidará conceptualmente el valor de lo dicho en esta nota.

La l gica de la verdad.indd 76 04/07/2014 13:47:06

1.2.1 Infundación inherente

Una oración o conjunto de oraciones es *inherentemente infundado* cuando su infundación depende exclusivamente de su estructura lógica. Suponiendo que los nombres a continuación son rígidos, algunos ejemplos de oraciones de este tipo son:

(M) La oración M es falsa

(H) La oración H es verdadera

Estas oraciones son conocidas como "El Mentiroso" y "El Honesto", respectivamente (para más información, véase la Introducción a este volumen). Otros casos de conjuntos de oraciones inherentemente infundadas lo constituyen los llamados *ciclos*. Las oraciones 1A y 1B ilustran un llamado *ciclo mentiroso* (de longitud 2):

(1A) La oración 1B es falsa

(1B) La oración 1A es verdadera

Es sencillo ver que si la oración 1A dijera que la oración 1B es verdadera, tendríamos no ya un ciclo mentiroso, sino un *ciclo honesto*.

El enfoque tarskiano tiene problemas aun si nos limitamos a los casos de infundación inherente. Por un lado, no nos permite distinguir entre M (cuya aceptación conlleva un absurdo) y H (cuya aceptación es arbitraria, pero no genera trivialidad).

En segundo lugar, hay oraciones como

(1C) 1C es verdadera o falsa.

que no sólo no generan problemas, sino que parecen ser intrínsecamente verdaderas (o falsas).

Por último, se encuentran ciertas oraciones que refieren unas a las otras *mutuamente*, como el clásico ejemplo del Par Abierto ilustra

(1D) 1E es falsa.

(1E) 1D es falsa.

Cuya caracterización dentro del enfoque de jerarquías tampoco es apropiada, pues o bien 1D se encuentra *por encima* de 1E en la jerarquía (y en virtud de ello

La l gica de la verdad.indd 77 04/07/2014 13:47:06

puede predicar su falsedad), o viceversa. Si poseen el mismo subíndice, entonces ninguna logra su cometido.[34]

1.2.2 Infundación empírica

La infundación inherente no es, sin embargo, la única cara de la moneda. Existen oraciones o conjuntos de oraciones infundados debido a hechos contingentes. Un caso de este tipo de fenómeno lo constituye la oración 1H: si los hechos hubieran sido diferentes, esas oraciones no hubieran resultado infundadas, y habrían podido realizar afirmaciones verdaderas o falsas.

(1H) La oración que está inmediatamente arriba de la oración 1I es falsa

(1I) La nieve es blanca

(1J) Los pingüinos son aves

Es fácil ver cómo, si la oración 1J hubiera estado inmediatamente arriba de la oración 1I, la oración 1H no hubiera realizado una afirmación patológica.

La infundación empírica no es un constructo teórico que pueda evitarse imponiendo restricciones sintácticas. Por el contrario, es un *riesgo* real que comporta el uso del predicado veritativo, y que una teoría de la verdad debe rescatar. Para apreciar este hecho, Kripke nos pide que imaginemos que Jones realiza la siguiente afirmación:

(1K) Jones: La mayor parte de las afirmaciones de Nixon sobre Watergate son falsas.

Pero, desafortunadamente, resulta que, al momento de su emisión, las afirmaciones de Nixon se encontraban divididas de modo tal que la mitad de ellas eran verdaderas y la mitad falsas, con excepción de:

34. Es importante destacar que las evaluaciones teóricas del Par Abierto se dividen, recientemente, en dos: la mayoría, siguiendo la tradición medieval, admite que el Par no es infundado (ni mucho menos paradójico). Se trata simplemente de asignarle verdad a 1E (o 1D) y falsedad a 1D (o 1E), pero no a ambas. Lo único inusual es el hecho de que no hay razones independientes (razones suficientes no semánticas) para atribuirle falsedad a una de las oraciones en vez de a la otra. Sin embargo, recientemente Roy Cook (2011) ha defendido la idea de que, bajo cierto trasfondo teórico, el Par Abierto es paradójico, y –más osado aún– que es un *nuevo tipo* de paradoja.

La l gica de la verdad.indd 78 04/07/2014 13:47:06

(1L) Nixon: Todo lo que dice Jones sobre Watergate es verdadero.

Frente a este caso, existen tres posibilidades:

(a) Ambos están usando el mismo subíndice.

(b) El subíndice de Jones es más bajo que el de Nixon

(c) El subíndice de Jones es más alto que el de Nixon.

En el primer caso, el conjunto de emisiones es paradójico, en tanto no es posible asignarle valores de verdad estables. Y su paradojicidad no depende de características propias de las oraciones, sino del hecho empírico de que Nixon emitió previamente ciertas afirmaciones acerca de Watergate y no otras.

Para evitar decir algo paradójico, Jones podría elegir un predicado de muy bajo nivel, como $\mathbf{Tr}_0$ (opción "b"), pero de ese modo podría no estar cumpliendo su objetivo, suponiendo que entre las oraciones que quiere condenar como falsas se encuentra por ejemplo:

(1M) Nixon: Es verdad que yo no conspiré para ocultar Watergate.

Jones puede predicar la falsedad de esta afirmación sin riesgo de paradoja con sólo elegir un predicado con subíndice mayor a **1**. Con lo cual, resulta que debe conocer exactamente los índices de todas las afirmaciones de Nixon antes de poder realizar la suya. Pero una de las funciones principales del predicado veritativo es poder realizar este tipo de generalizaciones sin necesidad de conocer todos los casos que caen bajo el cuantificador (poder decir cosas como, por ejemplo, "Todos los teoremas de la aritmética son verdaderos").

Además, incluso cuando Jones conociera exactamente cuáles fueron los enunciados pasados, podría estar intentando incluir también los futuros, y entonces debería prever la posibilidad de que Nixon no hubiera dicho 1L, y que por el contrario en algún momento vaya a emitir

(1N) Nixon: Todo lo que dice Jones acerca de Watergate es falso.

Lo que sucede aquí es que 1K y 1N no pueden ambas cumplir con su intención comunicativa: si ambas están al mismo nivel, ninguna refiere a la otra. Con lo cual, la estrategia de Jones tiene que ser asignar siempre los subíndices más altos posibles (opción "c"). Pero para cualquier ordinal, Nixon podría en el futuro elegir uno más alto.

La l gica de la verdad.indd 79 04/07/2014 13:47:06

En conclusión, Jones no puede elegir sus subíndices de ninguna manera. La lección de estos casos es que no se puede exigir que las oraciones tengan un nivel intrínseco, sino que se debe permitir que lo encuentren "por sí solas".

2. Teoría de Puntos Fijos

2.1 Exposición conceptual

El enfoque de Kripke respecto de la verdad puede ser explicado conceptualmente mediante dos metáforas: la imagen ascendente y la imagen descendente,[35] fuertemente emparentadas con los principios de Captura y Liberación, respectivamente. Ambas explicaciones precisan de un grupo de nociones primordiales para el enfoque de Kripke: (i) la noción de un lenguaje básico (que no cuente con predicados semánticos) y, consiguientemente, de un modelo de dicho lenguaje; (ii) la noción de lenguaje extendido por predicados semánticos (usualmente, el predicado veritativo); (iii) la noción de esquema de valuación no-clásico; (iv) la noción de modelo parcial, y consiguientemente, la noción de punto fijo. La exposición e implementación técnica de dichas nociones se desarrolla de manera extensa en la sección siguiente. Aquí, en cambio, nos referiremos a la teoría de manera no técnica, sino conceptual.

La metáfora de *la imagen ascendente* presenta al enfoque kripkeano del siguiente modo, en analogía con el principio de Captura. Un hablante comprende y maneja competentemente un lenguaje básico que cuenta con todos los medios expresivos necesarios, excepto con predicados semánticos. Nos disponemos entonces a enseñarle cómo utilizar el predicado veritativo.

Para ello le damos al usuario la siguiente directiva: si una oración es verdadera (falsa) en el lenguaje de base, es posible aplicar correctamente el predicado Tr, i.e. 'verdadero' (alternativamente: ¬Tr, i.e. 'falso') a esa oración. Si es posible aplicar correctamente el predicado 'verdadero' a la oración A, diremos que A se

35. Yablo (1982) muestra que –en virtud de la formalización que él presenta– la imagen ascendente y la imagen descendente son equivalentes para cualquier esquema de valuación monótono.

La l gica de la verdad.indd 80 04/07/2014 13:47:07

encuentra en la *extensión* del predicado Tr. Si es posible aplicar correctamente el predicado 'falso' a la oración A, diremos que A se encuentra en la *antiextensión* del predicado Tr. (Lo mismo vale para las oraciones complejas, respetando los principios usuales de composicionalidad.)

¿Qué sucede con las oraciones que tienen reiteradas apariciones del predicado veritativo? Oraciones como "Es verdadero que es verdadero que es verdadero que 2+2=4". El proceso de evaluación que el hablante ha aprendido se repite y luego de tres aplicaciones, dicha oración adquirirá un valor semántico.

Este procedimiento continúa –potencialmente– hasta el infinito, generando extensiones cada vez mayores. Sin embargo, dado que la cardinalidad C del conjunto de oraciones es fija, llegaremos a un ordinal α con no más de C predecesores, tal que la aplicación de este procedimiento por vez α no arroje ningún resultado diferente al resultante de la aplicación anterior. Habremos "agotado las oraciones", y diremos que habremos llegado a un *punto fijo*.

Por lo pronto, llamaremos a las oraciones que sean verdaderas o falsas en el *punto fijo*, oraciones *fundadas*, y a las que no cuenten con ningún valor semántico las llamaremos *infundadas*. ¿Cuál es la idea subyacente al concepto de fundación e infundación, desde la imagen ascendente? Sencillamente, la idea de que la verdad (o falsedad) de una oración *superviene* sobre hechos no semánticos: que la oración 'Es verdadero que el libro que está sobre la mesa tiene 500 páginas' sea finalmente verdadera o falsa se debe al número de páginas que tiene el libro que está sobre la mesa, y a nada más. Sabemos, no obstante, que existen oraciones como 'Esta oración es falsa' (que refiere, dadas las condiciones adecuadas, a sí misma), que no se fundan finalmente sino en hechos semánticos, o en oraciones que contienen irreductiblemente términos semánticos. Tales oraciones no surgen gracias a predicaciones, erradas o correctas, sobre los hechos fundados de un lenguaje básico; son, por el contrario, oraciones infundadas que carecen por tanto de un valor semántico clásico.

La metáfora de *la imagen descendente*, en analogía con el principio de Liberación, ofrece un punto de vista distinto para comprender el enfoque de punto fijo kripkeano. En esta imagen, el hablante comprende desde el comienzo el lenguaje que cuenta con el predicado veritativo, y se esfuerza por evaluar cada una de las oraciones que se le ofrecen, a fin de determinar su valor semántico. La noción central aquí es la de *dependencia*: el evaluador analiza aquello de lo que cada oración del lenguaje depende, esperando llegar a oraciones verdaderas (o falsas) pertenecientes al lenguaje de base; es decir, a oraciones que no contengan,

La l gica de la verdad.indd 81 04/07/2014 13:47:07

de manera irreductible, términos semánticos. Para ello, se parte de una oración y se la descompone en sus constituyentes de modo que, acorde al principio de composicionalidad, si la inspección de sus componentes demuestra llegar, tras finitas operaciones de inspección, a una oración del lenguaje de base (que será, consiguientemente o bien verdadera o bien falsa), entonces la oración de la que habíamos partido resultará fundada (y recibirá un valor semántico clásico), dependiendo en cada caso de la conectiva lógica principal de la oración, y asignando los valores semánticos de acuerdo de los principios de composicionalidad y al esquema de valuación adoptado.

Esta metáfora elucida el carácter infundado de las oraciones que no reciben un valor de verdad en el punto fijo al mostrar que ellas dependen de sí mismas, de manera directa, o de manera indirecta (si dependen de oraciones que dependen, luego de un rodeo, de la oración inicial).

Por otra parte, en lo que respecta a la fundación de una oración, algunos esquemas –como veremos en el caso de Kleene Débil– dictaminan como infundadas a oraciones que tienen siquiera un componente infundado. Pero Yablo (1982: 122) afirma que la fundación no se trata de 'cubrir todas las bases', sino de 'tener una pierna en la cual descansar', entonces ¿por qué exigir que *cada uno* de los componentes de una oración, luego de *finitos* pasos, llegue a (i.e. se funde en) un hecho o conjunto de hechos no semánticos (o, de manera alternativa, a una oración o conjunto de oraciones que no contengan irreductiblemente términos semánticos)? Este asunto nos llama a la reflexión sobre la medida en que la fundación de una oración debe ser total –todos sus componentes deben estar fundados– para ser tal, y en qué medida la infundación de alguno de sus componentes es fatal –basta un componente infundado, para constituir una oración infundada. Estos asuntos permanecen abiertos y son un tópico importante de discusión.

Ejercicios para la sección 2.1

[1] Considere si puede haber oraciones infundadas y verdaderas, u oraciones infundadas y falsas. En caso afirmativo, ¿qué ejemplo podría dar al respecto?

[2] ¿Cree usted que puede haber oraciones *parcialmente infundadas*?

La l gica de la verdad.indd 82 04/07/2014 13:47:07

2.2 Semántica de puntos fijos

En esta sección mostraremos como extender un lenguaje L de primer orden con algún código fijo CG para nombrar sus oraciones, a un lenguaje L_{Tr} que contenga su propio predicado veritativo. Para ello, añadimos un nuevo símbolo 'Tr' al vocabulario de L y definimos una familia de modelos que lo deje sin interpretar:

Definición 2.1 Un *Modelo Básico* M_B es un par ordenado <D, I>, donde D contiene códigos para todas las oraciones de L_{Tr} e I es una función que asigna
- a cada nombre a_m de L_{Tr} un objeto de D,

Asumimos que L tiene un nombre 'A' para cada oración A, y que I('A') = CG(A)
- a cada símbolo f_m de función n-ádico de L_{Tr} una función f_m: $D^n \rightarrow D$
- a cada símbolo G_m de predicado n-ádico de L una función g_m: $D^n \rightarrow \{1,0\}$

Las funciones que interpretan los predicados nos muestran su extensión –todas las tuplas a las que les asigna 1– y la antiextensión –todas las tuplas a las que les asigna 0.

Notemos que este fragmento del lenguaje es clásico, en tanto toda oración atómica de L queda ya determinada como verdadera o falsa. No obstante, sabemos que si queremos interpretar el predicado restante, debemos permitir que ciertas fórmulas sean evaluadas de modo diferente. Para eso, introduciremos a continuación una serie de alternativas.

2.2.1 Esquemas de valuación

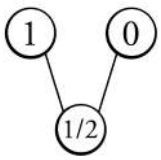
Los esquemas de valuación son las reglas que determinan cómo adquieren valores las oraciones compuestas a partir de oraciones más simples. Todos los esquemas que vamos a considerar son trivalentes, es decir, son conjuntos de operaciones definidas sobre el conjunto K = {1, ½, 0}. El 1 será el valor designado ('verdad') y 0 su negación ('falsedad'). Al valor ½ lo llamaremos 'indeterminación'. Kripke insiste en que no se debe considerar a la indeterminación como un tercer valor de verdad. Volveremos sobre esto en secciones posteriores, pero por el momento valga aclarar que es posible construir las pruebas de modo tal que sólo se hable de verdad y falsedad –ver Fitting (1986)–, aunque nosotros

La l gica de la verdad.indd 83 04/07/2014 13:47:07

no seguiremos ese camino. No obstante, rescataremos conceptualmente esta distinción utilizando el término "valores" para referirnos al conjunto {1, ½, 0} y "valores de verdad" para referirnos a {1,0}.

Será necesario definir un orden parcial sobre el conjunto K, y lo haremos de la siguiente manera:

$K = <K, \leq>$



De aquí en adelante, para todo conjunto con el que formemos una estructura algebraica, usaremos el nombre del conjunto en cursiva para referirnos a esa estructura.

En términos de Gupta y Belnap (1993), puede pensarse que los valores de verdad son mayores a la indeterminación puesto que comportan "más información", aunque ninguno de ellos es mayor que el otro (es igual de informativo saber que algo es verdadero que saber que es falso).

Kripke considera tres esquemas no clásicos: Kleene Fuerte, Kleene Débil y Supervaluacionismo. El objetivo de Kleene Fuerte es rescatar las condiciones clásicas de verdad, por ejemplo, que una disyunción es verdadera cuando tiene un disyunto verdadero, o una conjunción es falsa cuando uno de sus conyuntos es falso. Por su parte, el objetivo de Kleene Débil es rescatar la idea de que una oración no puede tener su valor determinado cuando alguno de sus componentes no lo tiene. Finalmente, el esquema supervaluacionista intentará suplir una falencia de los otros dos: la ausencia de verdades lógicas.

Cada esquema será nombrado con una letra griega: σ es el supervaluacionista, τ es el clásico, μ es Kleene Débil y κ es Kleene Fuerte. Usaremos también esa letra como subíndice para distinguir las funciones de verdad de las conectivas a las que están asociadas, y para indicar bajo qué esquema es evaluado un modelo dado.

Kleene Fuerte κ:

$\neg_\kappa$: {<0,1>, <1,0>, <½, ½>}

$\supset_\kappa$: {<<x,y>,z> | z= 0 si (x=1 y y=0) y z=1 si (y=1 o x=0)}

$\vee_\kappa$: {<<x,y>,z> | z=1 si (x=1 o y=1), y z=0 si (x=0 y y=0)}

La l gica de la verdad.indd 84 04/07/2014 13:47:09

$\wedge_K$: {<<x,y>,z> | z=1 si (x=1 y y=1), y z=0 si (x=0 o y=0)}
$\forall_K$: { <X, z> | z=1 si (todo x∈X=1) y z=0 si (algún x∈X=0)}
$\exists_K$: { <X, z> | z=1 si (algún x∈X=1) y z=0 si (todo x∈X=0)}

Kleene Débil μ:

$\neg_\mu$: {<0,1>, <1,0>, <½, ½>}
$\supset_\mu$: {<<x,y>,z> | z= 0 si (x=1 y y=0) y z=1 si ((y=1 y x≠½) o (x=0 y y≠½)}
$\vee_\mu$: {<<x,y>,z> | z=1 si ((x=1 y y≠½) o (y=1 y x≠½)), y z=0 si (x=0 y y=0)}
$\wedge_\mu$: {<<x,y>,z> | z=1 si (x=1 y y=1), y z=0 si ((x=0 y y≠½) o (y=0 y x≠½)}
$\forall_\mu$: { <X,z> | z=1 si (todo x∈X=1) y z=0 si (algún x∈X=0 y ningún y∈X=½)}
$\exists_\mu$: { <X,z> | z=1 si (algún x∈X=1 y ningún y∈X=½)) y z=0 si (todo x∈X=0}

A modo de ilustración, presentamos las tablas de verdad correspondientes

$\wedge_K$	0	1	½
0	0	0	0
1	0	1	½
½	0	½	½

$\vee_K$	0	1	½
0	0	1	½
1	1	1	1
½	½	1	½

$\neg_K$	
0	1
1	0
½	½

$\supset_K$	0	1	½
0	1	1	1
1	0	1	½
½	½	1	½

$\wedge_\mu$	0	1	½
0	0	0	½
1	0	1	½
½	½	½	½

$\vee_\mu$	0	1	½
0	0	1	½
1	1	1	½
½	½	½	½

$\neg_\mu$	0
0	1
1	0
½	½

$\supset_\mu$	0	1	½
0	1	1	½
1	0	1	½
½	½	½	½

A partir de estos esquemas, pueden definirse los conceptos de verdad en M y consecuencia lógica mediante una definición recursiva de la función valuación V. Mostramos el caso de Kleene Fuerte, y omitimos Kleene Débil, que es análogo.

$V_{M\kappa}(G_m a_1 \ldots a_n) = g_m(I(a_1)\ldots I(a_n))$
$V_{M\kappa}(\neg A) = \neg_\kappa(V_{M\kappa}(A))$
$V_{M\kappa}(A \wedge B) = \wedge_\kappa(V_{M\kappa}(A), V_{M\kappa}(B))$

La l gica de la verdad.indd 85 04/07/2014 13:47:09

$V_{M\kappa}(A \vee B) = \vee_{\kappa}(V_{M\kappa}(A), V_{M\kappa}(B))$
$V_{M\kappa}(A \supset B) = \supset_{\kappa}(V_{M\kappa}(A), V_{M\kappa}(B))$
$V_{M\kappa}(\forall yA) = \forall_{\kappa}(\{x \mid x = V_{M\kappa}(A[y/a] \text{ para todo } a\})$
$V_{M\kappa}(\exists yA) = \exists_{\kappa}(\{x \mid x = V_{M\kappa}(A[y/a] \text{ para algún } a\})$

Definición 2.2: $\Gamma \models_{\kappa} A$ sii en todo modelo M_{κ} en que $V_{M\kappa}(\Gamma)=1$, $V_{M\kappa}(A)=1$

La lógica resultante del esquema κ más la definición anterior de consecuencia lógica es conocida como K3, y pertenece a la familia de lógicas paracompletas. Se dice que una lógica es paracompleta cuando algunas instancias de tercero excluido no reciben el valor designado. En el caso de K3 (al igual que sucede en una lógica basada en Kleene Débil), todo esquema de verdad lógica clásica tiene instancias indeterminadas, con lo cual ninguno valdrá de manera irrestricta.

Es también usual encontrar en la literatura las teorías paracompletas caracterizadas como aquellas que contienen "gaps" semánticos, es decir, oraciones que no son ni verdaderas ni falsas. Esta definición es más vaga que la anterior, pues hace falta que especifiquemos en qué sentido los gaps no son ni verdaderos ni falsos, y dependiendo de cómo precisemos eso, puede no ser tampoco equivalente. Por ejemplo, Kipke los entiende como aquellas oraciones para las cuales la teoría prueba que $\neg Tr(A) \wedge \neg Tr(\neg A)$. Sin embargo, nótese que en K3 dicha oración no es verdadera (es falsa para oraciones fundadas e indeterminada para infundadas), lo cual haría de ella una teoría paracompleta pero no gappy.

Otra posibilidad de entender a los gaps simplemente como oraciones que reciben un tercer valor, que no es designado (a diferencia de los gluts, que reciben un tercer valor que sí es designado). En ese sentido, K3 es gappy.

La no equivalencia de todos estos conceptos se vuelve incluso más clara cuando introducimos al esquema supervaluacionista, que también es gappy en el sentido en que K3 lo es y no en el anterior. Sin embargo, no es una teoría paracompleta, y el motivo es que no es veritativo funcional. Para definir la verdad en un modelo basado en este esquema tenemos que mirar cómo se comportan las oraciones en una familia de modelos emparentados, usualmente llamados "precisificaciones".

Definición 2.3 Un modelo M^{+} es una *Precisificación* de un modelo M_{σ} si y sólo si M^{+} es clásico en el sentido de sólo asignar 0 o 1, y para toda oración A, $V_{M\sigma}(A) \leq V_{M+}(A)$

De esa manera

La l gica de la verdad.indd 86 04/07/2014 13:47:09

$V_{M\sigma}(A) = 1$ sii para toda precisificación M^+ $V_{M+}(A) = 1$
$V_{M\sigma}(A) = 0$ sii para toda precisificación M^+ $V_{M+}(A) = 0$
$V_{M\sigma}(A) = ½$ sii para alguna precisificación M^+_m se da que $V_{M+m}(A) = 1$ y para alguna precisificación M^+_n se da que $V_{M+n}(A) = 0$

Cuando una oración recibe el valor 1 en un modelo supervaluacionista, se dice que es *superverdadera*, y *superfalsa* si recibe el valor 0.

Definición 2.4: $\Gamma \vDash_\sigma A$ sii en todo modelo M_σ en que $V_{M\sigma}(\Gamma)=1$, $V_{M\sigma}(A)=1$

Los tres esquemas tienen las siguientes propiedades:
Definición 2.5 Un esquema es *Normal* cuando arroja valores clásicos si recibe valores clásicos.
Definición 2.6 Un esquema es *Monótono* cuando preserva el orden de los valores: Si $v1 \leq v2$ y $v3 \leq v4$ entonces $f(v1,v3) \leq f(v2,v4)$

Nada en las pruebas depende del esquema utilizado, así que usaremos Kleene Fuerte como ejemplo, extensible a cualquiera que sea monótono.

2.2.2 Verdad como punto fijo del operador salto

Nuestro objetivo es entonces encontrar una interpretación adecuada para Tr en cada modelo, es decir, una interpretación que asigne 1 a los códigos de oraciones verdaderas y 0 a los demás objetos. Para esto, en primer lugar vamos a definir un operador sobre el conjunto de interpretaciones:

Definición 2.7 Un *Operador Salto* (κ_M) es una operación que va de interpretaciones posibles de un predicado monádico en un modelo básico M_B a otras interpretaciones posibles. Para cada objeto que asigne una interpretación:
- Si codifica una oración, el operador arroja una interpretación que le asigna el valor de esa oración.
- Si no codifica una oración, arroja 0.

La l gica de la verdad.indd 87 04/07/2014 13:47:09

Intuitivamente, podemos pensar que si "proponemos" una interpretación g_n para Tr, el operador salto nos ofrece la interpretación g_m que realiza las asignaciones correctas de valores de verdad para M_B+g_n. La nueva interpretación toma como información las asignaciones de la interpretación que pusimos como *input* y "corrige" la extensión de Tr.

Dado que el valor de una oración depende del esquema que estemos utilizando, cada esquema tiene su operador. En segundo lugar, introducimos la noción de punto fijo:

Definición 2.8: $g_n \in X$ es un *Punto Fijo* de una operación κ_M sobre el conjunto X sii $\kappa_M(g_n) = g_n$

Las interpretaciones que son puntos fijos son aquellas que el operador salto no corrige, porque asignan valores correctos dado el modelo a las oraciones de lenguaje base, y valores estables a las oraciones que se forman al agregar Tr, y que incluyen a las que involucran autoreferencia patológica.

Ejemplo 2.9

Lenguaje L_{Tr}*:*	L= {Tr(x), F(x), 'a', 'b'}
Modelo M_B*:*	D= {a,b}
	I('a') = a
	I('b') = b
	I(F(x))= {<a,1>, <b,0>}
Código CG:	CG('F('a')') = a
	CG('¬Tr('b')') = b

Posibles interpretaciones de Tr para un esquema clásico τ:

g_1= {<a,1>, <b,1>} g_2 = {<a,0>, <b,1>} g_3 = {<a,1>, <b,0>}
g_4 = {<a,0>, <b,0>}

Operación salto τ_M:

$\tau_M(g_1)$ = {<a,1>, <b,0>} $\tau_M(g_2)$ = {<a,1>, <b,0>} $\tau_M(g_3)$ = {<a,1>, <b,1>}

$\tau_M(g_4)$= {<a,1>, <b,1>}

La l gica de la verdad.indd 88 04/07/2014 13:47:09

En el modelo, la oración *Fa* –codificada por el objeto a– es verdadera. La operación salto nos dice que, si nos limitamos a ella, tanto g_1 como g_3 serían buenos candidatos a interpretar el predicado Tr. Sin embargo, dado que la oración b es un Mentiroso, ninguna de esas interpretaciones hace a Tr un predicado veritativo, ya que g_1 dice que el Mentiroso es verdadera, pero el modelo que resulta de agregar g_1 la hace falsa, y viceversa para g_3.

Ahora bien, si trabajamos con un esquema de valuación con tres valores, podemos considerar la siguiente interpretación:

$g_5 = \{<a, 1>, <b, ½>\}$

Y g_5 es un punto fijo de la operación salto κ_M

$\kappa_M(g_5) = \{<a, 1>, <b, ½>\}$

Para establecer el resultado general es necesario probar que la operación salto tiene punto fijo en todo lenguaje y modelo básico, bajo un esquema monótono trivalente.

Vale la pena aclarar que no es obligatorio enviar las no-oraciones a falso, y de hecho esa decisión repercute en la metateoría resultante: si las no-oraciones reciben todas el valor 0 o todas ½, la relación de consecuencia no es compacta. Como ejemplo para el primer caso, la manera de probarlo es tomar un conjunto de oraciones que digan que la constante *c* no es el nombre de la oración *A*, para toda *A*. Ese conjunto implica que ¬Tr(*'c'*), dado que las no-oraciones no son verdaderas. Pero eso no vale para ningún subconjunto finito, puesto que entonces *c* puede ser el nombre de cualquier oración que no esté en ese conjunto.

2.2.3.Preliminares

Para comenzar, es preciso introducir algunos conceptos de teoría conjuntos:

Definición 2.10 Un *Conjunto parcialmente Ordenado* es un par ordenado $<X, \leq>$, donde X es un conjunto no vacío y $\leq$ es una relación Reflexiva, Antisimétrica y Transitiva.

Definición 2.11 Una *Cadena* es un subconjunto totalmente ordenado incluido en un conjunto parcialmente ordenado.

Para un subconjunto Y de un conjunto X parcialmente ordenado.

La l gica de la verdad.indd 89 04/07/2014 13:47:10

Definición 2.12 Una *Cota superior* es un elemento de X mayor o igual a todos los de Y.
Definición 2.13 Una *Cota Inferior* es un elemento de X menor o igual a todos los de Y.
Definición 2.14 El *Supremo* es la cota inferior del conjunto de las cotas superiores de Y. Se escribe ⋁Y.
Definición 2.15 El *Ínfimo* es la cota superior del conjunto de las cotas inferiores de Y. Se escribe ⋀Y.
Definición 2.16 El *Máximo* es la cota superior única.
Definición 2.17 El *Mínimo* es la cota inferior única.
Definición 2.18 El *Maximal* es un elemento que no tiene ninguno mayor a él.

2.2.4 Estrategia

El concepto central de esta prueba es el de Orden parcial coherente completo. Si Y es un subconjunto de un conjunto X parcialmente ordenado, entonces

Definición 2.19 Y es *Consistente* en X sii todos sus subconjuntos tienen cota superior en X.
Definición 2.20 X es un *Orden parcial coherente completo (opcc)* sii todos sus subconjuntos consistentes tienen supremo.

Aunque el concepto de consistencia es familiar para el lector, su correlato algebraico recién introducido puede resultar algo desconcertante, ya que la conexión entre ambos no es evidente. Esto debería volverse más claro ahora que notamos que los opcc que nos interesan involucran "conceptos semánticos". La primera estructura algebraica que presenta esa forma ya la presentamos, y es *K*, el conjunto de valores. En ese caso, la idea de conjunto consistente se traduce como "subconjunto de K que no contiene al 1 y al 0" (dado que {1,0} no tiene cota superior en K). En el caso de las interpretaciones, un conjunto de interpretaciones consistente es uno en el cual no hay dos elementos tales que uno asigne 1 y el otro 0 al mismo objeto.

La l gica de la verdad.indd 90 04/07/2014 13:47:10

La segunda estructura[36] es $\iota(T)$, el conjunto de las posibles interpretaciones de Tr, cuyo orden dependerá directamente del de *K*: $g_n \leq g_m$ si y sólo si g_n asigna valores menores o iguales que los que asigna g_m, para todos los objetos.

Pasemos entonces a la estrategia general. Lo primero que queremos hacer es probar lo que más arriba afirmamos, es decir, que esa estructura es un opcc.

PASO 1: $\iota(T)$ es un opcc.

Para encontrar cuál de los miembros de $\iota(T)$ nos ofrece la extensión adecuada del predicado T, tenemos que determinar si alguno de ellos es punto fijo del operador salto. El resultado anterior nos permite probar exactamente eso:

PASO 2: κ_M tiene puntos fijos.

Para probar ese resultado, es preciso mostrar que el operador salto es monótono. De hecho, κ_M tiene más de un punto fijo. Esto nos conduce al tercer opcc

PASO 3: Los puntos fijos de κ_M forman un opcc

Lo interesante de ello es que esos puntos fijos no son todos iguales. Introduciremos una clasificación de distintos tipos y probaremos su existencia.

PASO 4: κ_M tiene puntos fijos mínimo, maximales e intrínsecos.

2.2.5 La Prueba

PASO 1

Teorema 2.21: $\iota(T)$ es un opcc

Prueba: Queremos mostrar que todo subconjunto consistente en $\iota(T)$ tiene supremo. Para ello tomamos uno arbitrario F y definimos F_d para cada objeto $d \in D$ como el subconjunto de K formado por las imágenes de las funciones de F para ese objeto d. F_d es consistente en *K*, ya que de lo contrario F sería inconsis-

36. Para todos los conjuntos que ordenemos usaremos el mismo símbolo $\leq$, para resaltar la dependencia de unos órdenes sobre otros, pero este abuso de notación no debe llevarnos a pensar que se trata de la misma relación. Dado que los conjuntos sobre los que está definida dicha operación de orden son distintos, la operación es naturalmente distinta también.

La l gica de la verdad.indd 91 04/07/2014 13:47:10

tente en $\iota(T)$. Por lo anterior, y dado que *K* es un opcc, VF_d existe. A partir de él podemos definir la función f que "extiende" a las de $F: VF=f=\{<d,n> \mid n=VF_d\}$.

Ejemplo 2.22

Sea $D=\{a,b\}$. En ese caso, $\iota(T)=\{\{<a,1>, <b,1>\}, \{<a,1>, <b,0>\}, \{<a,0>, <b,1>\}, \{<a,0>, <b,0>\}, \{<a,½>, <b,1>\}, \{<a,½>, <b,0>\}, \{<a,½>, <b,½>\}, \{<a,1>, <b,½>\}, \{<a,0>, <b,½>\}\}$. Ya vimos cómo se interpreta intuitivamente la idea algebraica de consistencia en el caso del conjunto de valores. En el caso de las interpretaciones posibles de Tr, un conjunto consistente en $\iota(T)$ es aquel al cual no pertenecen dos interpretaciones que asignan 1 y 0 respectivamente a un mismo objeto. Pongamos por ejemplo, que $F=\{\{<a,1>, <b,½>\}, \{<a,½,>, <b,0>\}\}$. En ese caso, $F_a=\{1,½\}$ y $F_b=\{½,0\}$. Consecuentemente, $VF_a=\{1\}$ y $VF_b=\{0\}$. Eso nos da como resultado que $VF=\{<a,1>, <b,0>\}$.

Ejercicios para la sección 2.2.5

[1] Probar que la función f así obtenida es, en efecto, en todos los casos, el supremo de F.

[2] Probar que un conjunto consistente en $\iota(T)$ es aquel al cual no pertenecen dos interpretaciones que asignan 1 y 0 respectivamente a un mismo objeto.

PASO 2

Teorema 2.23: κ_M es monótono: Si $g_n \leq g_m$, entonces $\kappa_M(g_n) \leq \kappa_M(g_m)$

Prueba: Suponemos que $g_n \leq g_m$. De ello se sigue que la valuación de toda oración A en un modelo básico que extendemos con la interpretación g_n será menor que la valuación de esa oración en el modelo extendido con g_m. El operador salto nos ofrece el valor de la oración, $\kappa_M(g_n)(A) = V_M g_n(A)$[37] y $\kappa_M(g_m)(A) = V_M g_m(A)$. Por transitividad de $\leq$, se sigue que $\kappa_M(g_n) \leq \kappa_M(g_m)$.

37. La fórmula debe leerse como "el valor que la interpretación $\kappa_M(g_n)$ asigna al código de la fórmula A es el mismo que asigna la función valuación cuando incorporamos al modelo básico g_n como interpretación de Tr".

La l gica de la verdad.indd 92 04/07/2014 13:47:10

Ejercicios para la sección 2.2.5

[3] Probar por inducción que para toda oración A, $V_M g_n(A) \leq V_M g_m(A)$. Pista: Usar la monotonía de las funciones de verdad en los esquemas para probar el paso inductivo.

A continuación, probamos la existencia de interpretaciones que son puntos fijos. Para ello, es necesario introducir dos conceptos:

Definición 2.26 g_n es un *Punto correcto* sii $g_n \leq \kappa_M(g_n)$

Definición 2.27 g_n es un *Punto repleto* sii $\kappa_M(g_n) \leq g_n$

Intuitivamente, un punto correcto es una interpretación de Tr que no se equivoca respecto de los valores de verdad que atribuye, y que a lo sumo es incompleta, es decir, deja indeterminadas oraciones que deberían ser verdaderas o falsas. Un punto repleto, por su parte, es una interpretación que quizás asignó más valores de verdad de los que debería.

Probaremos que podemos "ascender" a un punto fijo siempre que partamos de un punto correcto.

Teorema 2.28: Para todo punto correcto de κ_M en ι(T), hay un punto fijo mayor a él

Prueba: Sea g_n un punto correcto. Tomamos el conjunto Y formado por todas las interpretaciones posibles de Tr mayores o iguales a él. Probaremos que la estructura resultante *Y*= <Y, ≤> es un opcc. Sea Z un subconjunto consistente en *Y*. Lo que tenemos que mostrar es que tiene supremo en Y.

Sabemos que Z es también consistente en ι(T), dado que Y es un subconjunto de ι(T). Y como ι(T) es un opcc, Z tiene un supremo en ι(T). Como todos los elementos de Y son mayores o iguales a g_n, $g_n \leq \bigvee Z$.

Lo que queremos mostrar ahora es que $\bigvee Z$ es el supremo de Z también en *Y*. Como ya sabemos que es mayor a g_n, si probamos que es correcto, cumple con las condiciones necesarias para pertenecer a Y. Sea g_o un elemento de Z:

[1] $g_o \leq \kappa_M(g_o)$	por pertenecer a Z es correcto.
[2] $g_o \leq \bigvee Z$	por definición de supremo.
[3] $\kappa_M(g_o) \leq \kappa_M(\bigvee Z)$	por monotonía de κ_M.
[4] $g_o \leq \kappa_M(\bigvee Z)$	por transitividad de ≤.

La l gica de la verdad.indd 93 04/07/2014 13:47:10

[5] $\kappa_M(VZ)$ es cota superior de Z	porque g_o era arbitrario.
[6] $VZ \leq \kappa_M(VZ)$	VZ es la menor de las cotas superiores.
[7] VZ es el supremo en Y	por ser correcto.

Como probamos que Y es un opcc, sabemos que tiene al menos un elemento maximal (este resultado lo probamos más adelante cuando mostremos que hay puntos fijos maximales). Sea ese elemento g_p

[1] $g_n \leq g_p \leq \kappa_M(g_p)$	dado que g_p pertenece a Y.
[2] $\kappa_M(g_p) \leq \kappa_M(\kappa_M(g_p))$	por monotonía de κ_M.
[3] $\kappa_M(g_p)$ está en *Y*	el paso anterior indica que es correcto.
[4] $\kappa_M(g_p) = g_p$	porque g_p es maximal en *Y*.
[5] g_p es un punto fijo mayor a g_n	

Ejercicios para la sección 2.2.5

[4] Armar un ejemplo tomando el modelo, lenguaje y código del ejemplo 1, e indicar qué corresponde en ese caso a g_n, ι(T), Y, Z, VZ y g_o. Confirmar mediante el ejemplo que (a) VZ en ι(T) es el mismo que VZ en Y, y que (b) g_o es un punto fijo mayor a g_n.

PASO 3: LOS PUNTOS FIJOS FORMAN UN OPCC

La prueba anterior nos garantiza la existencia de un punto fijo bajo la suposición de que hay algún punto correcto. Sin embargo, dado que el conjunto vacío es trivialmente un punto de ese tipo, hemos de hecho probado la existencia efectiva de al menos un punto fijo. Sin embargo, en las condiciones que nos interesan tendremos más de uno, y no todos poseen las mismas características. La idea será entonces clasificarlos y probar la existencia de cada uno de ellos en particular.

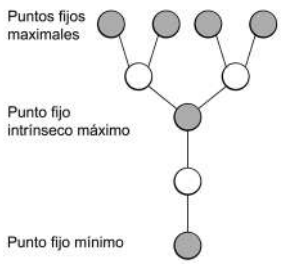
Lo primero que haremos será ordenarlos como hemos hecho hasta ahora con los valores y las interpretaciones de Tr, y mostrar que esta nueva estructura también es un opcc.

Conjunto de puntos fijos: Sea *P*(ι(T)) el conjunto de los puntos fijos de κ_M en ι(T)

Estructura de puntos fijos: Sea P la estructura formada ordenando P(ι(T))

La l gica de la verdad.indd 94 04/07/2014 13:47:11

A modo de adelanto, el siguiente grafo representa esquemáticamente el modo en que luce *P*



Teorema 2.29 P es un opcc (Teorema de punto fijo de Visser)

Prueba: Como antes, tomamos un subconjunto Y consistente en *P*. Dado que P es un subconjunto de $\iota(T)$, sabemos que Y también es consistente allí. Como ya probamos que $\iota(T)$ es un opcc, sabemos que Y tiene supremo $\bigvee Y$ en esa estructura. Pero lo que hay que mostrar es que tiene supremo en P. Para ello

(1) Probamos que $\bigvee Y$ es una interpretación correcta

Para todo $y \in Y$, $y \leq \bigvee Y$	por def supremo
[1] $\kappa_M(y) \leq \kappa_M(\bigvee Y)$	por monotonía de κ_M
[2] $y = \kappa_M(y)$	todos los elementos de Y son puntos fijos
[3] $y \leq \kappa_M(\bigvee Y)$	por transitividad de $\leq$
[4] $\kappa_M(\bigvee Y)$ es cota superior de Y	por def cota superior
[5] $\bigvee Y \leq \kappa_M(\bigvee Y)$	$\bigvee Y$ es la menor de las cotas superiores.

(2) Tomamos el ínfimo $\bigwedge Z$ del conjunto Z de los puntos fijos mayores o iguales a $\bigvee Y$ y probamos que es repleto.

Sabemos que $\bigwedge Z$ existe porque acabamos de probar que $\bigvee Y$ es correcto y, por el teorema 2.2, el conjunto de puntos fijos mayores a él no es vacío. Por ende, por el teorema 4.1 que probaremos más adelante, sabemos que tiene un elemento menor. $\bigwedge Z$ es al menos ese elemento. La prueba de que $\bigwedge Z$ es una interpretación repleta es análoga a la anterior

Para todo z, $\bigwedge Z \leq z$	por def ínfimo
[1] $\kappa_M(\bigwedge Z) \leq \kappa_M(z)$	por monotonía de κ_M

La l gica de la verdad.indd 95 04/07/2014 13:47:15

[2] $\kappa_M(\bigwedge Z)$ es cota inferior de Z por def cota inferior
[3] $\kappa_M(\bigwedge Z) \leq \bigwedge Z$ porque el $\bigwedge Z$ es la mayor cota superior.

(3) Por ende, hay un punto fijo b entre ambos ($\bigvee Y \leq b \leq \bigwedge Z$)

Sea C el conjunto de puntos repletos mayores o iguales a $\bigvee Y$. Como mostramos que $\bigwedge Z$ es uno de ellos, el ínfimo de C se encuentra entre ambos. Lo que hay que probar es que $\bigwedge C$ es el punto fijo b que buscamos. Para ello, es necesario mostrar que $\bigwedge C$ es repleto y $\kappa_M(\bigwedge C)$ también (si ambos son mayores o iguales al otro, son iguales). Dejamos esto como ejercicio.

(4) Probamos que b es el supremo de Y en P

[1] $b \in Z$ por def de Z
[2] Para todo z, $b \leq z$ si es menor a su ínfimo, es menor a los z
[3] $b = \bigwedge Z$ en $\iota(T)$ es menor a todos los z, y pertenece a Z
[4] $b = \bigvee Y$ en P

Ejercicios para la sección 2.2.5

[5] (a) Probar que $\bigwedge C$ es repleto. Pista: Probar que todo elemento de C también es mayor o igual a $\kappa_M(\bigwedge C)$. (b) Probar que $\kappa_M(\bigwedge C)$ es repleto. Pista: Usar (a) y probar que C está cerrado bajo κ_M.

PASO 4

PUNTO FIJO MÍNIMO

Teorema 2.30: κ_M tiene un punto fijo mínimo

Prueba: Lo que vamos a mostrar es que el supremo del conjunto vacío es el punto fijo mínimo. Por un lado, sabemos que el conjunto vacío es un subconjunto de P, puesto que todo conjunto incluye a $\emptyset$. Además, sabemos que es una interpretación trivialmente consistente (sólo $\emptyset$ es subconjunto de $\emptyset$, y cualquier elemento es cota superior de $\emptyset$). Por lo tanto, $\bigvee \emptyset$ existe en *P*. Y necesariamente

La l gica de la verdad.indd 96 04/07/2014 13:47:15

tiene que ser su elemento mínimo, ya que todo elemento de P es cota superior de $\emptyset$, y el supremo es por definición el más chico de las cotas superiores.

El punto fijo mínimo es aquella interpretación que asigna la menor cantidad de valores de verdad posibles (es decir, todas las oraciones que puedan ser estables mente ½ lo serán). Recordemos que en la prueba de la existencia de puntos fijos, partíamos de un punto correcto. El punto fijo mínimo es el punto al que llegamos cuando ese punto original es el conjunto vacío.

Esta primera interpretación de **Tr** nos permite caracterizar el concepto de oración infundada.

Definición 2.31 Una oración es *Fundada* si y sólo si tiene valor de verdad en el punto fijo mínimo.

Las oraciones fundadas son aquellas que son verdaderas o falsas en virtud del modelo básico, es decir, que no contienen **Tr**, o que son predicaciones de verdad o compuestos de predicaciones de verdad de oraciones que no contienen **Tr**.

PUNTOS FIJOS MAXIMALES

Teorema 2.32: κ_M tiene puntos fijos maximales.

Para probar este teorema es preciso valerse de un importante teorema de **ZFC**, que no probaremos pero que es equivalente al axioma de elección:

Lema de Zorn Si **A** es un conjunto parcialmente ordenado para el cual cada cadena tiene cota superior, entonces **A** tiene un elemento maximal.

Prueba: Las cadenas son conjuntos consistentes. Por ende, dado que P es un opcc, tienen supremo. Por lo tanto, tienen cota superior y se cumplen las condiciones requeridas por el lema de Zorn para afirmar que P tiene elementos maximales.

Tenemos muchos puntos fijos maximales, y no uno solo máximo, dado que, por ejemplo, algunos de ellos validarán al Honesto, mientras que otros no. Las interpretaciones maximales asignan la mayor cantidad de valores de verdad posibles, y por ello "toman decisiones" arbitrarias.

La l gica de la verdad.indd 97 04/07/2014 13:47:15

PUNTO FIJO INTRÍNSECO

Definición 2.33 x es un punto fijo intrínseco sii para todo y ∈ P(ι(T)), el par {x,y} es consistente.

En términos de Kripke, un punto fijo intrínseco es aquel que realiza asignaciones que no entran en conflicto con las de otros puntos fijos. Alternativamente, es un punto desde el cual hay un camino (hacia arriba o hacia abajo) hasta cualquier otro en el grafo de puntos fijos.

Las oraciones que resultan verdaderas en estas interpretaciones son aquellas cuyo valor de verdad no es "arbitrario". El punto fijo mínimo es un punto intrínseco, pero no decide ninguna oración infundada. En cambio, por ejemplo la oración I(b) = Tr('b') ∨ ¬Tr('b') aunque no recibe valor de verdad en el punto fijo mínimo, a diferencia del Honesto, no puede recibir cualquiera de los dos valores: de recibir uno de ellos, debe recibir 1. Recibirá pues ese valor en un punto intrínseco distinto del mínimo.

Sabemos qué conjunto de puntos fijos intrínsecos no es vacío, puesto que el punto fijo mínimo es intrínseco. Lo interesante es que podemos probar que la estructura que se forma cuando tomamos sólo los puntos fijos intrínsecos tiene un elemento máximo. Puede además verse en el gráfico de más arriba –aunque no lo probaremos– que ese elemento es el ínfimo del conjunto de los elementos maximales.

Sea IN el conjunto de elementos intrínsecos y *IN* la estructura resultante.

Teorema 2.34 IN tiene un elemento máximo

Prueba: Tomamos un subconjunto cualquiera Y de *IN*. Dado que *P* es un opcc y que los elementos intrínsecos son consistentes, Y tiene supremo en *P*. Por ende, si mostramos que ⋁Y es intrínseco, habremos mostrado que Y tiene supremo en *IN*. Y como Y es arbitrario, si todo subconjunto de *IN* tiene supremo en *IN*, existe un punto fijo intrínseco máximo. Probamos entonces que ⋁Y es intrínseco:

[1] Sea g_n un elemento de *P*

[2] Y ∪ $\{g_n\}$ es consistente — porque todo elemento de Y es intrínseco.

[3] Y ∪ $\{g_n\}$ tiene un supremo g_m en *P* — *P* es un opcc.

La l gica de la verdad.indd 98 07/07/2014 17:07:09

[4] $\forall Y \leq g_m$	Si g_n es mayor a todos los elementos de Y, el supremo de $Y \cup \{g_n\}$ es mayor que el de Y, y si no lo es, entonces el supremo sigue siendo el mismo.
[5] $g_n \leq g_m$	g_m es supremo.
[6] g_m es cota superior de $\{\forall Y, g_n\}$	por [5] y [6].
[7] $\{\forall Y, g_n\}$ es consistente	por definición de consistencia.
[8] Pero g_n era arbitrario	
[9] Para todo g, $\{\forall Y, g\}$ es consistente	

2.3 Algunas decisiones

Kripke no presenta tanto una teoría de la verdad, como una estructura a partir de la cual construirla. La semántica de puntos fijos nos deja abiertas ciertas decisiones sobre las cuales Kripke mismo no ofrece un veredicto concluyente

2.3.1 Discusión en torno al valor semántico 'indeterminado'

Un asunto importante al trabajar con la teoría de Kripke es tener en claro qué *estatus semántico* tienen aquellas oraciones que no reciben ningún valor semántico clásico en el punto fijo mínimo. La primera opción, que Kripke mismo defiende, es aquella que reza que las oraciones que no reciben un valor semántico clásico en el punto fijo mínimo *no adquieren ningún valor semántico*, dado que no expresan una proposición. La segunda opción dirá que las oraciones que no reciben ningún valor semántico clásico en el punto fijo mínimo *adquieren un valor semántico no clásico*. Así, 'indeterminado', tanto como 'verdadero' y 'falso' será un valor semántico más: si estos dos últimos se representan usualmente mediante '1' y '0' (ó 'v' y 'f'), el nuevo valor será representado por '½' (o 'i', alternativamente).

Este debate, que puede parecer meramente verbal, no lo es en absoluto. Si tomamos la primera interpretación, será natural decir que la negación debe trabajar clásicamente. En otras palabras, que negar algo verdadero debe dar como resultado algo falso, negar algo falso debe dar como resultado algo verdadero, y negar algo que no posee valor semántico clásico debe dar como resultado algo

La l gica de la verdad.indd 99 04/07/2014 13:47:15

que no posea valor semántico clásico. En cambio, si tomáramos la segunda interpretación barajada más arriba, si 'indeterminado' fuese un tercer valor semántico, sería deseable tener una *nueva* conectiva que permita expresar que algo *no es verdadero*. Es decir, una conectiva tal que aplicada a algo verdadero dé como resultado algo falso, y aplicada a algo falso o indeterminado dé como resultado algo verdadero. Discutiremos esta posibilidad, sus ventajas, desventajas y complicaciones en las próximas secciones.

2.3.2 Cómo elegir el esquema de valuación adecuado

En primer lugar, es preciso preguntarse qué tan imperativo es elegir alguno de los esquemas como correcto, en particular a la luz del hecho de que Kripke mismo no lo hace, expresando simpatías por uno o por otro en distintos contextos. Y en relación a esto podemos notar que hay un sentido en que los esquemas no son rivales, ya que las oraciones fundadas y las paradójicas de cada uno pueden ordenarse por inclusión (Kleene Débil es el que tiene menor cantidad de oraciones fundadas y mayor cantidad de paradójicas, y el Supervaluacionista a la inversa, con Kleene Fuerte en el medio de ambos).

2.3.2.1 Supervaluacionismo

Ventajas

Verdades lógicas. En ninguno de los esquemas de Kleene resultan verdaderos los esquemas de verdades lógicas, en ninguno de los puntos fijos. Ello es así dado que, por ejemplo, M siempre será indeterminada, haciendo indeterminada también a M∨¬M. Por supuesto, toda instancia que involucre sólo oraciones fundadas será verdadera en todo punto fijo, y en Kleene Fuerte incluso algunas más, como M∨(*A*⊃*A*) (donde *A* es determinada, i.e. recibe valor 1 o 0).

En el esquema Supervaluacionista, por el contrario, toda instancia de verdades lógicas resulta verdadera. Veamos un ejemplo. Una interpretación de Tr que sea punto fijo del operador salto σ_M tendrá que tener como elemento <M, ½>, por los motivos ya conocidos. Esto quiere decir que hay precisificaciones que hacen verdadera a λ y otras que la hacen falsa. Sin embargo, las segundas, en tanto son clásicas, harán verdadera a ¬M. Por lo tanto, la oración M∨¬M

La l gica de la verdad.indd 100 04/07/2014 13:47:15

será superverdadera, ya que cada precisificación hará verdadero a alguno de sus disyuntos y por ende, verdadera a la disyunción.

Principio de solución uniforme. El principio de solución uniforme establece que, si todas las paradojas semánticas tienen el mismo origen, deberían tener la misma solución. Si tomáramos la postura de aquellos pocos autores (Field y Priest entre ellos) que se sienten inclinados a incluir a las paradojas de vaguedad como parte de las paradojas semánticas, las cosas no serían tan sencillas. Mientras que para tratar el fenómeno de Sorites (i.e. vaguedad) la alternativa supervaluacionista es una de las alternativas más populares; para tratar los fenómenos similares al Mentiroso (v.g. las usuales paradojas semánticas), por el contrario, las alternativas cubiertas en el espectro de Kleene (Débil o Fuerte, en sus interpretaciones paracompletas –Kripke– o paraconsistentes –Priest–) son más populares.

Composicionalidad. Hay ciertas reglas de composicionalidad que uno esperaría que recibieran valor 1 en todo punto fijo supervaluacionista (el predicado "Sent" significa "ser una oración"):

(D-NEG) $\forall x(\mathrm{Sent}(x) \supset (\mathrm{Tr}(\ulcorner\neg\neg x\urcorner) \equiv \mathrm{Tr}(x)))$
(CONJ) $\forall x(\mathrm{Sent}(x) \wedge \mathrm{Sent}(y) \supset ((\mathrm{Tr}(\ulcorner x\urcorner) \wedge \mathrm{Tr}(\ulcorner y\urcorner) \equiv \mathrm{Tr}(\ulcorner x \wedge y\urcorner)))$
(MP) $\forall x(\mathrm{Sent}(x) \wedge \mathrm{Sent}(y) \supset (\mathrm{Tr}(\ulcorner x \supset y\urcorner) \wedge \mathrm{Tr}(\ulcorner x\urcorner) \supset \mathrm{Tr}(\ulcorner y\urcorner)))$

Dado que no impusimos restricciones en las precisificaciones admisibles, tenemos algunas que hacen, por ejemplo, verdadera a $\mathrm{M} \wedge \mathrm{M}$ y al mismo tiempo falsa a M. Y por ende (CONJ) no es superverdadera. Existen distintos modos de subsanar al menos en parte esto: una posibilidad es requerir que las precisificaciones estén cerradas bajo consecuencia lógica clásica, otra es que sean maximalmente consistentes. De esta manera validamos casi todos los principios composicionales (los bicondicionales si tomamos la segunda ruta, sólo una de las direcciones para disyunción y negación, si elegimos exigir sólo la clausura bajo consecuencia).

Al mismo tiempo, a pesar de que los modelos supervaluacionistas hacen válidas a Captura y Liberación, si elegimos la primera restricción, los principios que afirman esa validez no resultan superverdaderos, y si elegimos la segunda restricción, sale como superverdadera la oración que afirma que alguna de esas reglas es inválida (aunque, por el funcionamiento de la disyunción, ello no implica que ninguna en particular se declare inválida). Si bien estos resultados no son deseables, el hecho de que el esquema supervaluacionista valide al menos

La l gica de la verdad.indd 101 04/07/2014 13:47:15

algunas generalizaciones puede considerarse una ventaja por sobre los de Kleene, que no validan ninguna.

Problemas

Significado de las conectivas. Una crítica que es muy habitual encontrar contra el supervaluacionismo es aquella que objeta que la idea de una disyunción verdadera sin disyuntos verdaderos hace al símbolo $\vee$ un mero constructo formal, y no una disyunción en el sentido ordinario de la palabra. Lo mismo sucede, naturalmente, con el existencial, que puede ser verdadero sin tener ningún testigo que lo sea.

2.3.2.2 Kleene

Interpretación del tercer valor. Un posible argumento a favor de Kleene Débil es el siguiente:

1. Las proposiciones son aquellos objetos abstractos que poseen valores de verdad.
2. La indeterminación no es un valor de verdad, sino la carencia de él.
3. El principio de composicionalidad exige que el significado de un objeto lingüístico complejo esté determinado por el significado de sus componentes.
4. Por lo tanto, una proposición que tiene un componente indeterminado debe ser indeterminada.

Este modo de interpretar la significación de Kleene Débil comporta pensar las oraciones indeterminadas como "sinsentidos". Si "La nada nadea" carece de sentido, "La nada nadea y Gardel nació en Francia" tampoco lo tendrá.

Por supuesto, todas las premisas del argumento son discutibles. Podríamos reemplazar (1), por ejemplo, por:

(1´) Las proposiciones son los objetos de (al menos algunos de) nuestros estados mentales intencionales, como creencias y deseos.

En ese caso, podemos considerar a las proposiciones indeterminadas como aquellas que no aportan información, y entonces es coherente que una proposición compleja provea información, aunque alguno de sus componentes no lo haga. La elección entre (1) y (1') parece entonces ser relevante a la hora de inclinarnos hacia uno u otro de los esquemas de Kleene.

La l gica de la verdad.indd 102 04/07/2014 13:47:15

Relatividad al código empleado. Una ventaja de Kleene Fuerte por sobre la alternativa débil es que el primer esquema tiene ciertas propiedades determinadas independientemente del código que se utilice para nombrar las oraciones. Entre esas propiedades se encuentran la cantidad de puntos fijos de Tr y el tipo de conjuntos definibles. Como ejemplo, tomaremos la posibilidad de expresar el Honesto. Supongamos que el predicado $F(x)$ sólo es satisfecho por el número de Gödel de la oración $\exists x(F(x) \wedge Tr(x))$. En el esquema de Kleene Fuerte, dicha oración representa al Honesto, dado que no se encuentra en ningún punto fijo intrínseco, y está en la extensión de Tr en algunos puntos maximales y en su antiextensión en los otros. En Kleene Débil, sin embargo, dado que $Tr(x)$ tiene instancias indeterminadas, y esto es suficiente para la indeterminación del existencial, la oración será siempre indeterminada, y por ende, paradójica. Como el Honesto es una oración infundada pero no paradójica, dicha fórmula no expresa el Honesto. Es posible lograr expresarlo con variantes más complejas de la fórmula, pero ello sólo bajo ciertas elecciones de códigos, que garanticen que ninguna oración indeterminada satisfaga el conyunto que contiene la predicación de verdad.

2.3.3 Cómo elegir el punto fijo adecuado

Kripke se limita a comentar que el punto fijo mínimo parece ser el más natural, pero esto no significa que esta decisión sea filosóficamente poco relevante. Básicamente, las alternativas parecen ser las siguientes:

(a) Uno de los puntos fijos constituye la extensión unívoca del predicado veritativo

(b) Más de uno de los puntos fijos son posibles extensiones del predicado veritativo.

En el segundo caso, estaríamos frente a un concepto ambiguo o vago. Si bien no es una vía que Kripke considere, es una posición posible, que posee la ventaja de considerar a las diversas interpretaciones como filosóficamente significativas. Esto es importante porque para definir conceptos como "paradójico" es necesario cuantificar sobre todos los puntos fijos. Si seguimos la primera de las alternativas, por el contrario, nos vemos frente a la pregunta de

La l gica de la verdad.indd 103 04/07/2014 13:47:15

qué representan los otros puntos fijos y a esto se le suma el problema de elegir cuál es la extensión adecuada.

Elegir un punto fijo maximal parece una opción poco prometedora. Por un lado, hay infinitos maximales distintos, con lo cual parece *prima facie* arbitrario elegir entre ellos. Y no sólo eso, sino que estaríamos violando el principio de superveniencia de la verdad, al menos sobre hechos no semánticos. Podríamos en teoría postular la existencia de hechos semánticos, que de alguna manera determinan un valor clásico para el Honesto y oraciones semejantes, pero es difícil ver qué interés comportaría tal compromiso.

Otra alternativa podría ser tomar a los enunciados *uniformes*, es decir, aquellos que son verdaderos en todo punto fijo maximal (con la anti extensión de Tr constituida por los que son falsos en todo punto fijo maximal). Esto incluiría a oraciones como "El honesto es verdadera o es verdadera su negación", que no es intrínseca, pero que podría querer considerarse verdadera. El problema serio de esta alternativa es que dicha extensión no constituye un punto ni fijo y ni siquiera uno correcto: la oración mencionada no recibe valor 1, a pesar de estar en la extensión de Tr, puesto que ninguno de sus disyuntos es uniforme.

Las opciones más consistentes están constituidas por el punto fijo mínimo y el intrínseco máximo. El primero es el que rescata la concepción redundantista de la verdad. El segundo excluye esa concepción, puesto que el predicado veritativo será indispensable para expresar ciertas oraciones verdaderas, como aquella que dice de sí misma que es verdadera o falsa. La intuición maximalista que se rescata es la de que la verdad no debe ser superveniente, pero tampoco arbitraria. Un problema con esta posición es que, una vez aceptadas las oraciones intrínsecas que no son fundadas, no parece haber razones para rechazar a las uniformes, pero estas, como dijimos más arriba, no conforman un punto fijo. Lo cierto es que la mayoría de los autores toman el punto fijo mínimo como default, sin detenerse a argumentar a su favor (algo similar sucede con Kleene Fuerte).

La l gica de la verdad.indd 104 04/07/2014 13:47:15

3. Problemas en torno al condicional: la invalidez del Esquema-T

El Esquema-T, como se ha dicho en el capítulo previo, es el criterio que Tarski aplica para llamar, a un predicado que lo cumpla, *predicado veritativo*, de manera que es deseable que sea válido de modo irrestricto en toda teoría de la verdad.

Bajo cualquiera de los esquemas de valuación que consideramos, la teoría de Kripke *no valida* Esquema-T. Para observar esta falla, consideremos cualquier oración que sea paradójica, y llamémosla *B*. Dado que la teoría de Puntos Fijos de Kripke cuenta con un predicado veritativo transparente –i.e. $\mathrm{Tr}(\ulcorner A \urcorner)$ y *A* son intersustituibles en cualquier contexto no opaco–, y que *B* tiene valor semántico indeterminado, los condicionales $\mathrm{Tr}(\ulcorner B \urcorner) \supset B$ y $B \supset \mathrm{Tr}(\ulcorner B \urcorner)$ tendrán un antecedente y un consecuente con valor semántico indeterminado; en consecuencia, cada uno de los condicionales tendrá valor semántico indeterminado, y la conjunción de ambos, es decir la instancia del Esquema-T relativa a *B*, también tendrá valor indeterminado. Finalmente, dado que hay al menos una instancia del Esquema-T que no es verdadera –y pese a que ninguna instancia del Esquema-T resulta falsa en la teoría–, el Esquema-T no es válido en la teoría de Kripke, lo que constituye un resultado negativo para una teoría muy prometedora. Cabe destacar, sin embargo, que si nos restringiéramos a las oraciones *fundadas*, el Esquema-T sería válido.

En virtud de esta falla es que en una amplia porción de la literatura sobre teorías de la verdad se esgrime la tesis de que la teoría de Kripke *no tiene un condicional apropiado*. En este sentido, un condicional apropiado sería uno que permitiera que el Esquema-T fuera válido, además de cumplir con algunos requisitos elementales, como validar Identidad (v.g. $A \supset A$) o *Modus Ponens*. Los esquemas de Kleene, como vimos, tampoco cumplen con el primero de esos requisitos, aunque sí sucede en todos los casos que *Modus Ponens* es válido.

Una alternativa sería considerar el condicional de Lukasiewicz, cuyas condiciones de verdad (considerando los valores ordenados según su valor numérico, y con la operación de resta definida de modo usual) son

$V_{ML}(A \supset B)=1$ si $V_{ML}(A) \leq V_{ML}(B)$
$V_{ML}(A \supset B)=1 - (V_{ML}(A) - V_{ML}(B))$ si $V_{ML}(A) > V_{ML}(B)$

La l gica de la verdad.indd 105 04/07/2014 13:47:15

Este condicional no es definible sobre la base de las conectivas que contamos (dado que ninguna tiene la propiedad de ofrecer valor ½ cuando sus dos componentes dan ½), pero uno podría pensar que es posible incorporarlo al sistema. Sin embargo, de hacerlo, hay una versión de la paradoja de Curry que surge en la teoría. Sea

(3A) Tr('3A') ⊃ C

donde C es la oración de Curry (véase la Introducción del presente volumen). Tr('3A') y 3A no pueden recibir el mismo valor, dadas las reglas para ⊃. En general, la amenaza de oraciones tipo Curry es uno de los principales problemas para cualquier teoría que quiera extender la kripkeana por la vía de un nuevo condicional.

En lugar de intentarlo, se puede aminorar el peso filosófico de no contar con el Esquema-T con la consideración de que, dado el modo en que escogimos definir consecuencia en todos los esquemas, Captura y Liberación son válidas, y del mismo modo los son:

(¬ Captura) De ¬ *A* se infiere ¬Tr('*A*')

(¬ Liberación) De ¬Tr('*A*') se infiere ¬ *A*

Si alguien abrazara la tesis de que la validez irrestricta del Esquema-T (y la transparencia del predicado veritativo) son los requisitos necesarios (y tal vez suficientes) para afirmar que se cuenta con una teoría de la verdad adecuada, un defensor de la teoría de Kripke podría esgrimir el siguiente argumento para convencerlo. Dado que el Esquema-T condensa las ideas de que "Si *A* (es verdadero, cierto, correcto, aceptable, probo, etc.), entonces Tr('A')", y viceversa, para tener una teoría de la verdad satisfactoria, es necesario que dichas inferencias sean rescatadas. La teoría de Kripke respeta el hecho que todas esas inferencias preservan verdad. Por tanto, la teoría de Kripke representa cabalmente las ideas presentes en el Esquema-T de Tarski, aunque éste no sea válido irrestrictamente. Por lo pronto, esta salida permanece como opción; depende de cada filósofo el optar (en virtud de razones tanto técnicas como filosóficas) por ella.

Ejercicios para la sección 3

[1] Considere el Esquema-T, la noción de Transparencia, y el par de inferencias Captura-Liberación. Elabore un argumento a favor o en contra de la equivalencia del contenido conceptual de cada una de ellas.

La l gica de la verdad.indd 106 04/07/2014 13:47:16

[2] El Esquema-T, ¿establece la equivalencia de Tr⌜A⌝ y *A*? Si así fuera, ¿a qué refiere dicha equivalencia: a su contenido informacional, su valor de verdad, o alguna otra cosa?

4. El regreso del metalenguaje

Uno de los principales problemas de la teoría de Kripke es la discordancia de ciertas evaluaciones teóricas y los dictámenes internos de la teoría en lo que respecta al valor semántico de ciertas oraciones. Kripke afirma que la oración del Mentiroso (entre otras oraciones infundadas, podríamos decir) no es ni verdadera ni falsa, implicando por medio de dicha afirmación que el contenido de la afirmación es *verdadero*. Podemos expresar esa idea mediante la oración 4A, recordando que M es la oración del Mentiroso

(4A) ¬(Tr('M') ∨ Tr('¬M'))

Por tanto, si la teoría dictaminara *internamente* que el valor semántico de 4A (i.e. de la construcción formal que expresa la tesis de que el Mentiroso no es ni verdadero ni falso), no es 'verdadero', sino otro valor semántico, estaríamos ante un grave desfasaje. Lamentablemente, este es el caso.

Dado que de acuerdo a la teoría de Kripke la oración M tiene valor semántico indeterminado, 4A también recibe ese valor. En conclusión, una tesis que debiera ser juzgada verdadera por la teoría, es catalogada como indeterminada. Esto no debería ser sorprendente, si reflexionamos sobre el hecho de que, dado que Tr es transparente, y que en la teoría valen las leyes de Morgan,[38] 4A es equivalente a la contradicción M∧¬M. Si 4A fuera verdadera, estaríamos frente a una teoría paraconsistente (teorías que serán tratadas en el capítulo 5), y no una paracompleta. Recordemos que las teorías paracompletas no hacen verdadera toda instancia de tercero excluido, pero ello no implica que hagan verdadera alguna de sus negaciones.

38. Que valen las leyes de Morgan no significa que el bicondicional que las expresa es siempre verdadero, dado que en Kleene no tenemos verdades lógicas, sino que las correspondientes interacciones entre disyunción, negación y conjunción reciben siempre los mismos valores semánticos.

La l gica de la verdad.indd 107 04/07/2014 13:47:16

Para comprender esta discordancia contamos, en primer término, con la explicación que Kripke provee, basada en una nueva manera de interpretar la división lenguaje–metalenguaje. Esta división, sin embargo, no es análoga a la abrazada por Tarski, que refería a una asimetría en *poder expresivo* (para quien hay oraciones que *no se pueden* formular en el lenguaje objeto, y *sólo se pueden formular* en el metalenguaje; por caso la oración del Mentiroso). La división de Kripke refiere a los valores semánticos que ciertas oraciones reciben, de manera diferenciada, en el lenguaje y el metalenguaje.

En la teoría de Tarski, dado que el lenguaje objeto forma parte del metalenguaje, si una oración del lenguaje (objeto) tiene valor semántico alguno, tendrá el mismo valor semántico en el metalenguaje –considerada como oración de aquel. En la teoría kripkeana, en cambio, el hecho de que una oración sea verdadera depende de si la contamos como parte del lenguaje o del metalenguaje. Si bien toda oración que tenga algún valor semántico clásico tendrá el mismo valor semántico cuando sea considerada como oración del metalenguaje, la afirmación conversa *no es cierta*. Existen oraciones que tienen valores semánticos clásicos *sólo cuando son consideradas como oraciones de metalenguaje,* y no lo tienen cuando son consideradas como oraciones del lenguaje objeto. Nuestra oración 4A es el caso testigo de este fenómeno.[39]

En cuanto a la interpretación filosófica o conceptual de esta división, Kripke sostiene que refleja la diferencia entre nociones que pertenecen al lenguaje (verdad, falsedad) y nociones que pertenecen al metalenguaje (indeterminación semántica o infundación, paradojicidad, etc.). Considera intuitivo que las nociones de infundación, paradojicidad, etc. no se encuentran en el discurso ordinario, y argumenta, por lo contrario, que sólo aparecen cuando reflexionamos sobre nuestro lenguaje y su semántica.

Una manera alternativa de comprender la discordancia entre la verdad 'intuitiva' de 4A y su indeterminación según la teoría de Kripke, hace énfasis en la falta de disponibilidad de una *nueva* negación '#': una negación que, cuando se aplique a algo *falso o indeterminado* dé como resultado algo verdadero, y cuando se aplique a algo verdadero dé como resultado algo falso.

39. Este hecho mismo puede tomarse para demostrar cómo es que lo que Tarski mostró imposible no es la autorreferencia sintáctica, permitida y avalada por sistemas muy usuales como las teorías aritméticas, sino la autorreferencia semántica.

La l gica de la verdad.indd 108 04/07/2014 13:47:16

Si tuviéramos esta negación (al menos si esta fuese la negación que constituye la conectiva principal de 4A), la oración 4A sería verdadera, eliminando el problema anterior. Pero el costo de esta solución es que, de contar con una conectiva tal, el esquema de valuación resultante no sería monótono. Si bien algunos esquemas pueden tolerar la introducción de funciones no monótonas y conservar el punto fijo, no es el caso de la negación #, como lo demuestra el fenómeno de revanchas que introduciremos en la próxima sección.

Ejercicio para la sección 4

[1] Juzgue la veracidad de las premisas utilizadas en el siguiente argumento: la importancia de contar con una negación exhaustiva reside en la capacidad del lenguaje formal de representar afirmaciones que realizamos en el lenguaje natural. Así como hay un sentido en que "la oración del Mentiroso no es roja" constituye una afirmación *verdadera* realizada en el lenguaje natural (no refiriéndonos meramente al color de la tinta en que se encuentra impresa, sino al hecho de que las oraciones no tienen color), hay *análogamente* un sentido en que "la oración del Mentiroso no es verdadera" constituye una afirmación *verdadera* realizada en el lenguaje natural. Una teoría de la verdad debe representar estas afirmaciones y sus valores semánticos de manera adecuada.

5. Revanchas

Otra de las malas noticias para la teoría kripkeana es la existencia de un fenómeno de infundación, usualmente conocido como *revancha*: consiste en el surgimiento de una paradoja desde las entrañas de la solución a un problema de infundación previo, es decir, a partir de las nuevas categorías semánticas (o bien, de la categorías de oraciones que no cuentan con ninguno de los valores semánticos clásicos) creadas con la finalidad de solucionar anteriores problemas de infundación. En el caso de la teoría de Kripke, el valor semántico 'indeterminado' fue creado con la finalidad de clasificar a las oraciones que no son *ni verdaderas, ni falsas*. Podríamos entonces pedirle a la teoría que exprese esa nueva categoría mediante un nuevo predicado *Ind*, una exigencia inevitable para quien defienda el principio de autosuficiencia semántica. Sin embargo, en ese caso podemos

La l gica de la verdad.indd 109 04/07/2014 13:47:16

formular una nueva oración infundada, que llamaremos 5A, cuya denominación usual es 'El Mentiroso Reforzado'.

(5A) $\neg$Tr('5A') $\vee$ *Ind*('5A')

5A es una oración infundada que no puede ser[40] ni verdadera, ni falsa, ni indeterminada. De modo que, para clasificar a la oración 5A como infundada y con valor semántico no clásico, pero distinto del (ahora 'primer') valor de verdad indeterminado, deberemos concebir una teoría que la catalogue como 'indeterminada$_2$', donde esta última categoría semántica incluye sólo a las oraciones que no son verdaderas, ni falsas, ni indeterminadas. El problema está a la vista: de este modo se genera una *jerarquía* de valores de verdad. Algo sumamente indeseable para quienes, escapando a las jerarquías semánticas elaboradas por Tarski, vislumbraron la teoría kripkeana como una salida plausible.

Cuando nos referimos anteriormente a la imposibilidad de contar con una negación que fuera como la negación clásica, pero que diera como resultado algo verdadero cuando negara algo *falso o indeterminado*, mencionamos que dicha conectiva volvería un esquema no monótono al esquema de valuación que la contuviera. Por otra parte, debemos decir también que la disponibilidad de una conectiva tal implicaría la posibilidad de generar un equivalente a la revancha presentada anteriormente para la teoría de Kripke, ahora en la forma de la oración 5B

(5B) #Tr('5B')

Supongamos que 5B es verdadera: si así fuera, Tr('*5B*') también lo sería, por *corrección*, y luego la nueva negación # dictaminaría que #Tr('*5B*') (i.e. *5B* misma) es falsa, incurriendo en una contradicción con el supuesto inicial. Por tanto, 5B no puede ser verdadera.

40. Cabe resaltar que esta conclusión se extiende al esquema Kleene Fuerte, pero no al esquema Kleene Débil. El razonamiento es el siguiente. Supongamos que *Ind* es un predicado tal que *Ind*(*A*) tiene valor 1 cuando *A* tiene valor ½, e *Ind*(*A*) tiene valor 0 cuando A tiene valor 0 ó 1. Si bien *Ind*('1P') tiene valor 1, 5A tiene valor ½, y por Transparencia *Tr*('5A') también. Por la cláusula de la negación $\neg$*Tr*('5A') también recibe valor ½. Por último, por la cláusula de la disyunción para Kleene Débil, la disyunción de algo verdadero (o falso) y algo indeterminado, da como resultado algo indeterminado. Por lo tanto 5A recibe un valor indeterminado, y no es paradójica.

La l gica de la verdad.indd 110 04/07/2014 13:47:16

Supongamos que 5B es falsa: si así fuera, Tr('*5B*') también sería falsa, y por tanto # arrojaría el resultado de que #Tr('*5B*') es verdadera, llevándonos a contradecir lo que habíamos supuesto inicialmente. Por tanto, *5B* no puede ser falsa.

Supongamos que 5B es indeterminada: si así fuera, Tr('*5B*') también sería indeterminada, por lo que la negación # daría como resultante que #Tr('*5B*') es verdadera, lo cual contradice nuestro supuesto inicial. Por tanto, *5B* no puede ser indeterminada.

En conclusión, si contáramos con la 'nueva' negación #, existiría una oración del tipo de *5B* que no puede ser ni verdadera, ni falsa, ni indeterminada.

La imposibilidad de contar con una conectiva tal, entonces, ilustra cabalmente un impedimento de la teoría de la verdad de Kripke: la imposibilidad de lograr autosuficiencia semántica.[41] La esperanza de lograr un lenguaje tal permanece en el horizonte para los lógicos y filósofos, y motiva investigaciones crecientes en complejidad, profundidad e interés. De estos intentos, los más relevantes serán desarrollados en algunos de los capítulos siguientes.

Ejercicio para la sección 5

[1] Algunos filósofos alegan que es innecesario contar con una conectiva como #, pues dado que las oraciones infundadas constituyen "sinsentidos" que carecen de valor semántico genuino, negarlas (i.e. negar un sinsentido) no puede dar lugar a una afirmación verdadera, sino a otro sinsentido –tal como lo refleja la negación usual que ya está disponible en el lenguaje. Evalúe este argumento.

6. Conclusión

No es casual que Kripke caracterice a su propia teoría como un *esbozo*. Podría decirse que en realidad lo que presentamos es una familia de teorías, cuyo núcleo común es el rechazo de las jerarquías de lenguajes y la comprensión del

41. Al respecto, dos textos de sumo interés son Ketland (2003), que versa sobre la posibilidad de las teorías no clásicas (i.e. que no respetan bivalencia) de representar su propia semántica, y Cook (2007), que propone entender las revanchas como un fenómeno que se debe "abrazar", y no mirar con desdén.

La l gica de la verdad.indd 111 04/07/2014 13:47:16

predicado veritativo como un punto fijo. Mostramos cómo cualquier esquema monótono tiene esa propiedad, y que existen diversas clases de puntos fijos, todas ellas posibles extensiones de Tr.

A partir de ello se despliegan una serie de alternativas que hacen a la propuesta muy rica filosóficamente, al punto de que muchas de las teorías subsiguientes pueden verse como variaciones sobre un tema kripkeano.

Incluso con los problemas que hemos visto que la teoría presenta, vale la pena notar que los intentos de superarlos suelen generar teorías mucho más complejas, y no carentes de complicaciones ellas mismas. Es por esto que, además de su fecundidad y apertura conceptual, la teoría de puntos fijos tiene una ventaja que será difícil de superar: su elegancia y simplicidad (al menos relativas), tanto desde el punto de vista formal como filosófico.

La l gica de la verdad.indd 112 04/07/2014 13:47:16

Apéndice: Axiomatizaciones de la Teoría de Puntos Fijos de Kripke

En este apéndice presentaremos una axiomatización que usualmente se propone cómo correlato sintáctico de la teoría de Kripke bajo el esquema de Kleene Fuerte, debida al matemático Solomon Feferman. Discutiremos brevemente alrededor de ella algunos problemas y alternativas que surgen para superarlos.

Para formular los axiomas, necesitamos antes introducir cierta terminología. $\mathrm{Sent}_{\mathrm{Tr}}$ es el predicado unario que resulta verdadero sólo cuando se aplica a códigos de oraciones del lenguaje extendido con el predicado Tr. El símbolo de función ° es el correlato dentro del lenguaje de la función interpretación restringida a términos, es decir, cuando la función se aplica a (el código de) un término t nos ofrece el valor de t. Por otra parte, la función ternaria de sustitución x(t/s) es tal que aplicada a una fórmula x, un término s, y un término t, arroja la fórmula que resulta de sustituir cada aparición de s en x, por una aparición de t. Finalmente, introducimos símbolos para ciertas funciones sintácticas primitivas recursivas: [¬], [=], [∧], [∨], [∀], [∃], [Tr] son tales las aplicadas a (el código de) una (o dos) fórmula(s) dan como resultado (el código de) la fórmula que resulta de incorporar ese símbolo a la(s) fórmula(s) original(es). Por ejemplo, aplicar la función negación al código de una fórmula nos da el código de la fórmula negada, es decir, las oraciones [¬]'A' = '¬A' son teoremas del sistema. Las variables s y t se utilizan, para facilitar la lectura, como abreviaciones de la afirmación de que s y t son términos.

KF1 $\forall s \forall t\ (\mathrm{Tr}(s\ [=]\ t) \equiv s^\circ = t^\circ)$

KF2 $\forall s \forall t\ (\mathrm{Tr}([\neg]s\ [=]\ t) \equiv s^\circ \neq t^\circ)$

KF3 $\forall x\ (\mathrm{Sent}_{\mathrm{Tr}}(x) \supset (\mathrm{Tr}([\neg][\neg]x) \equiv \mathrm{Tr}(x)))$

KF4 $\forall x \forall y\ (\mathrm{Sent}_{\mathrm{Tr}}(x\ [\wedge]\ y) \supset (\mathrm{Tr}(x\ [\wedge]\ y) \equiv \mathrm{Tr}(x) \wedge \mathrm{Tr}(y)))$

KF5 $\forall x \forall y\ (\mathrm{Sent}_{\mathrm{Tr}}(x\ [\wedge]\ y) \supset (\mathrm{Tr}([\neg](x[\ \wedge]\ y)) \equiv \mathrm{Tr}([\neg]x) \vee \mathrm{Tr}([\neg]y)))$

KF6 $\forall x \forall y\ (\mathrm{Sent}_{\mathrm{Tr}}(x\ [\vee]\ y) \supset (\mathrm{Tr}(x\ [\vee]\ y) \equiv \mathrm{Tr}(x) \vee \mathrm{Tr}(y)))$

KF7 $\forall x \forall y\ (\mathrm{Sent}_{\mathrm{Tr}}(x[\vee]\ y) \supset (\mathrm{Tr}([\neg](x\ [\vee]\ y)) \equiv \mathrm{Tr}([\neg]x) \wedge \mathrm{Tr}([\neg]y)))$

KF8 $\forall v \forall x\ (\mathrm{Sent}_{\mathrm{Tr}}([\forall]vx) \supset (\mathrm{Tr}([\forall]vx) \equiv \forall t(\mathrm{Tr}(x(t/v)))))$

KF9 $\forall v \forall x\ (\mathrm{Sent}_{\mathrm{Tr}}([\forall]vx) \supset (\mathrm{Tr}([\neg][\forall]vx) \equiv \exists t(\mathrm{Tr}([\neg]x(t/v)))))$

KF10 $\forall v \forall x\ (\mathrm{Sent}_{\mathrm{Tr}}([\exists]vx) \supset (\mathrm{Tr}([\exists]vx) \equiv \exists t(\mathrm{Tr}(x(t/v)))))$

KF11 $\forall v \forall x\ (\mathrm{Sent}_{\mathrm{Tr}}([\exists]vx) \supset (\mathrm{Tr}([\neg][\exists]vx) \equiv \forall t(\mathrm{Tr}([\neg]x(t/v)))))$

KF12 $\forall t\ (\mathrm{Tr}([\mathrm{Tr}](t)) \equiv \mathrm{Tr}(t^\circ))$

KF13 $\forall t\ (\mathrm{Tr}([\neg][\mathrm{Tr}](t)) \equiv (\mathrm{Tr}([\neg]t^\circ) \vee \neg\mathrm{Sent}_{\mathrm{Tr}}(t^\circ)))$

KF14 $\forall x\ (\mathrm{Sent}_{\mathrm{Tr}}(x) \supset \neg\ (\mathrm{Tr}(x) \wedge \mathrm{Tr}([\neg]\ x)))$

La l gica de la verdad.indd 113 04/07/2014 13:47:16

Algunas ventajas de KF son: (i) Es ω-consistente; (ii) es aritméticamente correcta (no prueba ninguna oración aritmética falsa); (iii) trata a la verdad *composicionalmente* (el hecho de que pruebe una oración como verdadera depende de que haya probado verdaderos a sus componentes, de modo análogo a como funcionan las conectivas veritativo funcionales en la semántica de un lenguaje); y (iv) el predicado veritativo no se encuentra restringido a expresiones de un lenguaje en el que él mismo no aparezca.

KF es un sistema de lógica clásica. Esto implica, por ejemplo, que prueba todas las tautologías. Pero como hemos visto, el esquema κ no valida toda tautología clásica. ¿En qué sentido estamos entonces frente a una axiomatización de la teoría presentada? Para responderlo es preciso distinguir entre lo que se llama la *lógica externa*, que consiste en las oraciones que pueden probarse en un sistema dada cierta extensión de Tr (en el caso que nos importa, cuando sea un punto fijo), y la lógica interna, que consiste en las oraciones que están en esa extensión. Dicho de otro modo, la lógica externa son las oraciones A tales que, en un sistema S, $\vdash_S A$, mientras que la lógica interna son aquellas oraciones A tales que $\vdash_S \mathrm{Tr}(\ulcorner A \urcorner)$.

En el caso de KF, la lógica interna y la externa no coinciden, y es la primera la que es correcta respecto de los modelos kripkeanos. Esto implica, por ejemplo, que Captura –válida cuando se consideran modelos kripkeanos– hace inconsistente a KF. Lo cual es problemático, dado que una opción que habíamos considerado para aminorar el malestar provocado por no contar con los bicondicionales T era el hecho de poder validar las reglas de inferencia correspondientes.

Una salida posible –propuesta por Reinhardt– es la instrumentalista, es decir, que la teoría axiomática sea considerada como una herramienta para obtener teoremas acerca de la verdad, pero teniendo en cuenta que no todos sus teoremas son de esa naturaleza. Por ejemplo, a pesar de que KF prueba el Mentiroso, eso no debería preocuparnos, dado que lo que hay que considerar es la lógica interna, y $\nvdash_{KF} \mathrm{Tr}(\ulcorner M \urcorner)$. De hecho, $\vdash_{KF} \neg \mathrm{Tr}(\ulcorner M \urcorner)$, lo cual no está mal si consideramos la imposibilidad de expresar algo como la negación fuerte en la semántica de puntos fijos. Sin embargo, hay algo que parece profundamente errado en una teoría que prueba oraciones que también prueba no ser verdaderas. Otros problemas, vinculados con la interpretación instrumentalista de KF, pueden encontrarse en Halbach (2011).

Existen diversas alternativas para rescatar la que puede considerarse la genuina teoría kripkeana de la verdad. Una opción, a veces llamada IKF, consiste en considerar $\mathrm{IKF} = \{A : \vdash_{KF} \mathrm{Tr}(\ulcorner A \urcorner)\}$. Esta teoría, cuyos modelos ahora sí son los

La l gica de la verdad.indd 114 04/07/2014 13:47:16

puntos fijos kripkeanos bajo el esquema κ, tiene la ventaja de tener la misma fuerza aritmética que KF, pero manteniendo las características que hacían deseable a la propuesta de Kripke y que, como mencionamos más arriba, se perdían en la teoría clásica. Sin embargo, a pesar de que este conjunto de oraciones sea axiomatizable, puesto que se trata de un conjunto enumerable, no se cuenta con ninguna axiomatización natural (en el sentido de que explique, por ejemplo, el comportamiento composicional de la verdad, como lo hace KF). Otra opción es PKF, que se presenta bajo la forma de cálculos de secuentes o sistemas de deducción natural. La lógica de PKF también es parcial, pero se pierde algo de la fuerza aritmética de KF y KFS.

Biliografía

Beall, J. C. (ed.) (2007): *Revenge of the Liar: New Essays on the Paradox*, Oxford, Oxford University Press.

Burgess, J. (2010): "Kripke on truth", en Berger, A. (ed.), *Saul Kripke*, Cambridge, Cambridge University Press, pp. 141-159.

Cook, R. (2007): "Embracing Revenge: On the Indefinite Extendibility of Language", en Beall, J. C. (ed.), *Revenge of the Liar: New Essays on the Paradox,* pp. 31-52.

— (2011): "The No-No Paradox is a paradox", en *Australasian Journal of Philosophy*, 89 (3): 467-482.

Field, H. (2008): *Saving Truth From Paradox*, Oxford, Oxford University Press.

Fitting, M. (1986): "Notes on the mathematical aspects of Kripke's theory of truth", en N*otre Dame Journal of Formal Logic*, 27 (1): 75-88.

Gupta, A. y Belnap, N. (1993): *The Revision Theory of Truth*, Cambridge, MIT Press.

Halbach, V. (2011): *Axiomatic Theories of Truth*, Cambridge, Cambridge University Press.

Heck, R. Jr. (s/f): "Kripke's theory of truth", disponible online en: <www.frege.brown.edu>.

Horsten, L. (2012): *The Tarskian Turn: Deflationism and Axiomatic Truth*, Cambridge, MIT Press.

La l gica de la verdad.indd 115 04/07/2014 13:47:17

Ketland, J. (2003): "Can a many-valued language functionally represent its own semantics?", en *Analysis*, 63 (4): 292-297.
Kremer, M. (1988): "Kripke and the Logic of Truth", en *Journal of Philosophical Logic*, 17 (3): 225-278.
Kripke, S. (1975): "Outline of a theory of truth", en *Journal of Philosophy*, 72 (19): 690-716.
Leitgeb, H. (2005): "What truth depends on", en *Journal of Philosophical Logic*, 34 (2): 155-192.
Martin, R. L. y Woodruff, P. W. (1975): "On representing 'true-in-l' in L". en *Philosophia*, 5 (3): 213-217.
Yablo, S. (1982): "Grounding, dependence and paradox", en *Journal of Philosophical Logic* 11 (1): 117-137.
— (1985): "Truth and reflection", en *Journal of Philosophical Logic*, 14 (3): 297 - 349.
— (1993): "Paradox without Self-Reference", en *Analysis*, 53 (4): 251-252.

Bibliografía comentada

La teoría de Kripke sentó las bases para el inicio de investigaciones sobre la "fundación" de las expresiones, la relación que la fundación tiene con la paradojicidad, y otros asuntos; dos textos que todo lector interesado al respecto debe visitar son Yablo (1982) y Leitgeb (2005). En lo relativo a las revanchas o a los mentirosos "reforzados", es obligada la referencia a Beall (ed.) (2007), donde varios autores exponen sus visiones respecto de la posibilidad de lograr una teoría que sea inmune a las revanchas. Para el lector que se sienta atraído por estas temáticas será interesante leer, sobre todo, el capítulo del presente volumen que versa sobre la teoría de Hartry Field; asimismo Cook (2007) y Ketland (2003) son textos de sumo interés para el proyecto en cuestión. Por último, en Horsten (2012) y Halbach (2011) se encontrará una extensa exposición de las ventajas, desventajas, características distintivas y problemas tanto conceptuales como técnicos de las diversas axiomatizaciones de las teorías de Kripke.

La l gica de la verdad.indd 116 04/07/2014 13:47:17

Capítulo 3
La Teoría Revisionista de la Verdad

Natalia M. Buacar y Lavinia M. Picollo

La teoría revisionista de la verdad pretende resolver los problemas planteados por las paradojas semánticas generadas por el concepto de verdad sin adoptar jerarquías ni limitar, en modo alguno, el poder expresivo del lenguaje. El modo de hacerlo es reconocer el carácter circular del concepto de verdad. En la primera sección introducimos el marco filosófico en el que se desarrolla la teoría y delineamos el problema específico al que responde. Ofrecemos aquí una primera aproximación a la idea de verdad como concepto circular y a su significación por medio de una regla de revisión. En la segunda sección ofrecemos una presentación formal de la teoría en sus tres variantes: T^*, $T^\#$ y T^c. En la tercera sección llevamos adelante un estudio crítico de la propuesta. Finalmente, en el apéndice se incluye una versión axiomática de la teoría.

La l gica de la verdad.indd 117 04/07/2014 13:47:17

1 Introducción

1.1 Preliminares

La 'teoría de la revisión de la verdad' o 'teoría revisionista de la verdad' fue desarrollada de modo independiente por Anil Gupta y Hans G. Herzberger. En el mismo año estos autores publicaron los artículos seminales: Herzberger (1982a; 1982b) y Gupta (1982). Este último fue discutido críticamente por Nuel Belnap (1982). El trabajo conjunto de Gupta y Belnap cristalizó en *The Revision Theory of Truth*, texto clave en donde se despliega de modo acabado la teoría de la revisión y que será el eje de nuestra presentación.

La teoría revisionista surge como una respuesta al desafío de ofrecer un sistema que capture el concepto de verdad mediante (una versión del) esquema-T y que a la vez logre lidiar con los problemas planteados por las paradojas. De lo que se trata es de superar el escollo planteado por Alfred Tarski, el cual ha sido presentado en la introducción y el primer capítulo de este libro: el agregado de un predicado veritativo que respete el esquema-T a un lenguaje con capacidad autorreferencial conduce inevitablemente a paradojas e inconsistencia, si la lógica subyacente es la clásica.

Como suele suceder frente a un problema filosófico, existen al menos tres alternativas: adoptar un punto de vista escéptico con respecto a la posibilidad de solucionarlo, intentar disolverlo o encomendarse a la tarea de encontrar una solución positiva. Como ya se ha señalado en la introducción a este libro, es posible concebir el argumento asociado con la oración del mentiroso como evidencia de que el concepto de verdad es inconsistente. Esta *primera* alternativa teórica tiene sus costos dado el rol que juega la noción de verdad en la filosofía. Retomando el ejemplo tematizado en el primer capítulo, la noción de verdad resulta central en la explicación de la relación de consecuencia lógica.

La *segunda* opción suele sugerir una reinterpretación de los conceptos involucrados en el planteo del problema que lo revela como un pseudoproblema. Usualmente se considera que las oraciones problemáticas o bien no son auténticas oraciones o bien carecen de valor de verdad clásico (verdadero o falso). En el primer caso, las oraciones problemáticas son consideradas sinsentidos que no expresan proposición alguna, no pudiendo ser entonces verdaderas o falsas, y se disuelve así la aparente contradicción a la cual conducen. Esta es la vía tarskiana

La l gica de la verdad.indd 118 04/07/2014 13:47:17

expuesta en el primer capítulo de este libro. En el segundo caso, en cambio, se adscribe carácter infundado a dichas oraciones, razón por la cual carecen de valor de verdad clásico. Así, se disuelve el problema a partir de la disolución de las paradojas. La teoría de puntos fijos kripkeanos puede ser interpretada como un intento disolutorio en este segundo sentido.[42]

Como se ha notado en el capítulo anterior, el costo que han de pagar teorías como las de Saul Kripke es sacrificar algunas expresiones de la lógica clásica. Lejos de constituir una alteración menor, dicho sacrificio supone una reformulación del problema original. Por ejemplo, resignar el carácter exhaustivo (o exclusivo) de la negación permite evadir la paradoja.[43] Sin embargo, ello implica un recorte de los recursos expresivos de dicho lenguaje. Cabe sospechar entonces que no se ha solucionado el problema original que surgía en el contexto del lenguaje enriquecido, sino que se ha disuelto.

La teoría de la revisión se enmarca en la *tercera* alternativa. Una adecuada comprensión del concepto de verdad, de su naturaleza, revela que el problema de la verdad y las paradojas se vuelve resoluble. Son necesarias algunas precisiones con respecto al problema específico que la teoría de la revisión se propone resolver y eso será abordado en la siguiente sección. A modo de anticipo, no se intentará bloquear paradoja alguna, sino modelarlas. Se procurará ofrecer una teoría de la verdad que las explique. Esta teoría no resignará la autorreferencialidad y evitará jerarquías, a la vez que mantendrá la clasicidad de la lógica y, con ella, aquellos elementos involucrados en las paradojas semánticas, expresiones lógicas tales como las negaciones antes mencionadas. ¿Cómo ha de lograr todo esto? Poniendo en evidencia el carácter circular del concepto de verdad. La estrategia es entonces ofrecer una teoría que se adapte a tal naturaleza, razón por la cual se requiere una teoría de las definiciones circulares. La teoría de la verdad surge como corolario de tal teoría, y el concepto de verdad transparente adquiere nuevo sentido en ese contexto.

42. Al menos de lo que en la próxima sección llamaremos 'problema descriptivo'.

43. Una negación exhaustiva es aquella que, aplicada a cualquier oración no verdadera, esto es o bien falsa o bien carente de valor de verdad clásico, da lugar a una oración verdadera. Una negación exclusiva, en cambio, es aquella que no permite que una oración y su negación posean el mismo valor de verdad.

La l gica de la verdad.indd 119 04/07/2014 13:47:17

1.2 El problema a resolver

Se requieren algunas especificaciones respecto al modo en que los defensores de la teoría de la revisión entienden el problema que las paradojas semánticas plantean, pues es a la luz de ello que su propuesta ha de ser evaluada. A diferencia de lo que ocurría en capítulos anteriores –y de lo que se sugerirá en los siguientes– el problema específico al que la teoría de la revisión pretende hacer frente no es el de evitar o eliminar las paradojas, sino el de explicar cómo es que el lenguaje puede convivir con ellas sin tornarse inconsistente o inutilizable. En palabras de Herzberger (1982a: 479, traducción nuestra):

> En lugar de intentar eliminar aquellas paradojas, quisiera considerar el experimento de alentar positivamente a que ocurran y cómo encuentran su propia salida. Este abordaje, que denomino semántica intuitiva, es un ejercicio deliberadamente dirigido. La idea es dar un paso atrás y permitir que las paradojas revelen su funcionamiento interno.

Desde una perspectiva similar, Gupta (1982) y Gupta y Belnap (1993) reconocen que las paradojas conllevan dos problemas, uno normativo y otro descriptivo. Así, los estudios sobre paradojas caen en dos categorías. Desde un enfoque normativo, el objetivo es bloquear las paradojas y descubrir los cambios (si los hubiere) que las paradojas imponen sobre nuestra concepción y uso de 'verdadero'. En esta línea se enmarcan, entre otras, las teorías abordadas en los capítulos anteriores y posteriores de este libro. El proyecto de los teóricos de la revisión, al contrario, es resolver el problema descriptivo propuesto por las paradojas. La explicación del concepto de verdad pretende preservar todas las características de nuestra noción ordinaria de verdad y dar cuenta del significado y el uso de las oraciones de nuestro lenguaje ordinario que contienen la palabra 'verdadero'.

Conviven así dos orientaciones metodológicas. Por un lado, tal como destaca Herzberger, la 'inestabilidad semántica' que exhiben las paradojas sugiere un elemento que resultará central en el modo de concebir la evaluación semántica, como un proceso que va de etapa en etapa progresivamente. Pero por otro, Gupta y Belnap (1993) proponen poner el foco no tanto en las paradojas sino más bien en los usos ordinarios, no problemáticos, del concepto de verdad. Hay allí un fenómeno que demanda una explicación sistemática. Más aun, es la comprensión de los principios que subyacen a los usos ordinarios y no problemáticos del concepto de verdad la que ha de echar luz sobre el fenómeno de las paradojas semánticas.

La l gica de la verdad.indd 120 04/07/2014 13:47:17

Tal aproximación al problema y la consecuente orientación metodológica adoptada, delinean el marco en el cual se ofrece una teoría de la verdad. Esta teoría debe explicar tanto las oraciones problemáticas como las no problemáticas. Desde ya que las paradojas han de recibir una explicación satisfactoria, pero también han de recibirla nuestros usos ordinarios de 'verdadero'. Además, es menester que la teoría dé cuenta de la distinción entre ambas. En concordancia con la tesis de superveniencia semántica,[44] la verdad o falsedad de las oraciones no problemáticas debe quedar completamente determinada por hechos no semánticos. La teoría tiene que explicar entonces de manera sistemática cómo los valores de verdad de tales oraciones no problemáticas dependen de hechos no semánticos. Más aún, si bien los hechos no semánticos no necesariamente fijan un valor de verdad definitivo para todas las oraciones del lenguaje, sí determinan su carácter patológico y la teoría deberá explicar cómo esto se lleva a cabo. En resumen, la teoría de la verdad debe explicar nuestros juicios intuitivos concernientes a la verdad, falsedad y también a la patologicidad.

1.3 Una intuición fundamental

Gupta y Belnap (1993) reconocen la existencia de una intuición fundamental, la cual –naturalmente– habrá de ser resguardada: las instancias del esquema-T fijan el significado del concepto de verdad y son, por tanto, analíticas. Básicamente porque en conjunto fijan las condiciones bajo las cuales 'verdadero' se aplica a cualquier oración del lenguaje. Por tanto, las instancias del esquema-T pueden ser consideradas definiciones parciales del concepto de verdad.

Como ya ha señalado Eduardo Barrio en el primer capítulo, cuando esta intuición se codifica por medio de la convención T y los bicondicionales involucrados son clásicos, la intuición fundamental conduce a paradojas. De acuerdo con Gupta y Belnap (1993: 6), eso no sugiere que la intuición sea incorrecta sino que debe ser reconstruida de modo diferente: "Un problema central en la teoría de la verdad es resolver la paradoja sin dañar la intuición fundamental de ningún modo esencial". Las diferencias girarán en torno a lo que se entiende por 'bicondicionales T', 'fijar el significado' y 'verdad'. La (re)construcción de la

44. Véase la introducción a este libro.

La l gica de la verdad.indd 121 04/07/2014 13:47:17

teoría de la verdad nos conducirá en primer lugar a una interpretación adecuada de los bicondicionales T que desarrollaremos en la segunda sección: se ofrecerá una elucidación diferente del 'si y sólo si' involucrado en sus instancias. En segundo lugar, explicitaremos qué entender por 'fijar el significado' en 1.4 y en 1.5 mencionaremos algunos supuestos en torno a la noción de verdad.

1.4 La tesis de la significación

Tal como ha quedado estipulado en el primer capítulo, la convención T no sólo supone que los bicondicionales involucrados son clásicos, sino también que el modo en que fijan el significado del predicado veritativo es determinando su extensión. La manera de conceptualizar dicha fijación es mediante la condición de que la definición de verdad ha de implicar las instancias del esquema-T.

Como contrapunto, la lectura que Gupta y Belnap (1993) hacen de la intuición fundamental consiste en que el esquema-T constituye él mismo una definición de la noción de verdad y, por tanto, fija el significado de la verdad en todo mundo.[45] En esto consiste la tesis de significación, la cual pretende capturar la mencionada intuición fundamental.

Ahora bien, Gupta y Belnap argumentarán que dicho significado no es él mismo una regla de aplicación —como lo sería para cualquier concepto ordinario—, sino una regla de revisión, pues la verdad no es un concepto ordinario sino circular. Frecuentemente se ha considerado que el carácter circular de un concepto lo torna ilegítimo. Gupta y Belnap, en cambio, argumentarán a favor de la legitimidad de las definiciones circulares.

1.5 Algunos desiderata

Ya hemos mencionado cuál es la motivación que subyace al proyecto. Ello constituye sin duda un punto de partida, como así también algunos supuestos adicionales que mencionaremos a continuación.

45. Mundos que, como veremos, serán representados por lo que denominaremos 'modelos base'.

La l gica de la verdad.indd 122 04/07/2014 13:47:17

En primer lugar, la teoría de la verdad propuesta se restringe a lenguajes exentos de complicaciones tales como ambigüedad, vaguedad, indéxicos y construcciones intensionales. Es concebida únicamente para lenguajes formalizados. A este supuesto subyace la sospecha de que esos factores no serán decisivos en la respuesta al problema tratado. El lenguaje estudiado puede ser visto como un lenguaje cuantificacional de primer orden clásico al que se le agregará un predicado de verdad con una semántica específica. Así el fragmento libre del predicado de verdad permanece completamente clásico.

Otros supuestos son tomas de posición respecto al concepto de verdad que se desea analizar. Se trata de ofrecer una definición de verdad que capture la intuición fundamental precisada a través de la tesis de significación, de modo que no podrá (ni se propone) capturar todos los usos de 'verdadero', sino sólo algunos de ellos. El primero de estos supuestos atañe a la gramática lógica del predicado veritativo. Siguiendo la perspectiva tarskiana, se asume que la verdad es un predicado que se aplica a oraciones. Adicionalmente, la tesis de significación no es una condición de adecuación apropiada para todas las nociones de verdad aplicables a oraciones, sino que concierne sólo a una noción lógica, débil y absoluta de verdad. En lo que sigue explicaremos brevemente estas tres notas.

Dado que queremos preservar la analiticidad del esquema T, todas sus instancias deberán ser verdaderas. Así, por ejemplo, el bicondicional "La nieve es blanca' es verdadera si y sólo si la nieve es blanca' deberá ser necesariamente verdadero, i.e. deberá ser verdadero en todo mundo posible. Sin embargo, si permitiéramos que las interpretaciones de los términos no lógicos variaran en cada mundo considerado, bien podría ocurrir que en algún mundo –idéntico al nuestro por todo lo demás– 'nieve' significara lechuga. En tal mundo el bicondicional no resultaría verdadero. Estamos entonces frente a dos nociones de verdad. Una noción no lógica según la cual determinamos si una oración es verdadera en un mundo atendiendo al significado que los términos no lógicos involucrados en la oración tienen en ese mundo. Y otra noción lógica según la cual determinamos si una oración es verdadera en un mundo considerando el significado que los términos no lógicos involucrados en esta oración tienen en el mundo actual. Esta última es la noción en la cual estamos interesados porque es aquella que permite sostener la analiticidad del esquema T. Es también la noción de verdad útil para la lógica y la filosofía del lenguaje.

Otra clasificación posible para las diversas nociones de verdad distingue entre una noción débil y otra fuerte. De acuerdo con la primera, el estatus semántico de

La l gica de la verdad.indd 123 04/07/2014 13:47:17

'A' es verdadera' hereda el estatus semántico de A y resulta por tanto una noción de verdad transparente. Por el contrario, desde una concepción fuerte de la verdad el estatus semántico de ambas puede diferir. Consideremos la siguiente afirmación:

(1.1) El emperador del mundo juega a la ruleta.

Frecuentemente se piensa que carece de valor de verdad clásico. Analicemos ahora esta otra oración:

(1.2) (1.1) es verdadera.

Desde una lectura fuerte, a diferencia de (1.1), (1.2) no carece de valor veritativo, sino que es simplemente falsa, pues (1.2) no es verdadera. Como ilustra el ejemplo, la noción fuerte de verdad permite que el valor semántico de una oración y su predicación de verdad difieran. Por esa razón la tesis de significación resulta adecuada sólo para usos de verdad en que la noción expresada es débil, pues dicha tesis nos compromete con una noción transparente de verdad.

Por último, sabemos que la condición que se impone sobre la definición de verdad, lejos de mencionar relativización alguna a un modelo en particular, supone que las instancias del esquema-T son verdaderas en todo mundo posible. Por tanto, tal condición sólo es apropiada para el caso en que la noción de verdad definida sea absoluta o *simpliciter*, como contrapuesta a la de verdad en un modelo que ya ha sido desarrollada y problematizada en el primer capítulo.

1.6 Verdad circular

Antes de pasar a la presentación formal de la teoría, ofreceremos una primera aproximación al tratamiento que la teoría de la revisión ofrece para la noción de verdad. En 1.4 anticipamos que la definición de la noción de verdad dará lugar a una regla de revisión y no de aplicación, dada la naturaleza circular de la verdad. A continuación desarrollaremos este punto.

Toda definición de un predicado monádico G tiene la siguiente forma:[46]

(1.3) $x \text{ es } G =_{df} x \text{ es } A$

46. Por cuestiones de simplicidad nos limitaremos aquí a predicados monádicos, pero el enfoque puede extenderse a predicados de cualquier aridad.

La l gica de la verdad.indd 124 04/07/2014 13:47:17

donde lo que se encuentra a la izquierda de la identidad es el *definiendum* y a la derecha el *definiens*.[47] De acuerdo con (1.3), un objeto será un G si y sólo si es un A. De este modo, la definición (1.3) daría lugar a una regla de aplicación, siempre que fuéramos capaces de determinar si un objeto es un A previa e independientemente de que sea un G. Así por ejemplo, dada la oración:

(1.4) Sócrates es un ser humano.

y la definición de ser humano como animal racional:

(1.5) x es un ser humano $=_{df}$ x es animal y x es racional

podemos afirmar que Sócrates es un ser humano, sabiendo previamente que es animal y es racional. La definición (1.5) puede utilizarse de modo similar para cualesquiera objetos. Sin embargo, esto será posible sólo en la medida en que podamos evaluar que algo es un animal y que es racional independientemente de si es un ser humano o no, lo cual parece plausible. En términos generales, para que una definición de la forma (1.3) funcione como regla de aplicación –como en (1.5)–, el *definiendum* no debe aparecer de modo ineliminable en el *definiens*. Ése no siempre es el caso y prueba de ello son las definiciones circulares. Tales definiciones suelen ser excluidas como ilegítimas y los conceptos definidos por ellas considerados inexistentes. Gupta y Belnap, en cambio, consideran que sí es posible ofrecer una teoría consistente que incluya tales definiciones (y nociones). De hecho, la verdad se encuentra entre ellas.

De acuerdo con la tesis de significación, el esquema-T constituye una definición para la verdad. En términos de Gupta y Belnap, éste resulta entonces en las instancias de:

(1.6) 'A' es verdadera $=_{df}$ A

dadas por cada oración A de un lenguaje determinado, donde 'A' es un nombre de A. El bicondicional involucrado en el esquema-T, en lugar de ser el bicondicional clásico, es pues el bicondicional distintivo utilizado para definir un concepto. Su semántica será por tanto diferente. Cada instancia de este esquema ofrece una definición parcial de la verdad y algunas de ellas resultarán circulares. Consideremos la siguiente oración:

47. Como veremos en el ejemplo que sigue, A puede ser lógicamente complejo.

La l gica de la verdad.indd 125 04/07/2014 13:47:17

(1.7) "La nieve es blanca' es verdadera' es verdadera.

y su correspondiente instancia de (1.6):

(1.8) "La nieve es blanca' es verdadera' es verdadera $=_{df}$'La nieve es blanca' es verdadera

De acuerdo con nuestra presentación preliminar, éste es un caso de circularidad, pues el *definiendum* aparece en el *definiens*. No obstante, la circularidad es eliminable, pues recurriendo a esta nueva instancia de (1.6):

(1.9) 'La nieve es blanca' es verdadera $=_{df}$ La nieve es blanca

es posible evaluar el valor de verdad de "La nieve es blanca' es verdadera' y, a partir de allí, evaluar el de (1.7). De este modo, sabemos si "La nieve es blanca' es verdadera' cae o no bajo la extensión del predicado veritativo.

Sin embargo, existen oraciones donde este movimiento no es posible. Retomemos la oración del mentiroso introducida en capítulos anteriores:

(M) (M) no es verdadera.

Su instancia correspondiente de (1.6) –el esquema-T– parece tener un carácter circular no eliminable:

(1.10) (M) es verdadera $=_{df}$(M) no es verdadera

En esta ocasión no existe un modo de obrar paso a paso para dar con el valor de verdad de '(M) es verdadera'; al menos si no disponemos de información adicional. De este modo, el conjunto de los bicondicionales que constituyen la definición de verdad no resulta suficiente para dar lugar a una regla de aplicación del predicado de verdad. No resulta suficiente para ofrecernos su extensión, pues tanto el concepto definido como su definición son circulares.

No obstante, no todo está perdido. Para determinar si (M) cae o no bajo el concepto de verdad, resulta suficiente suplementar el esquema-T con extensiones hipotéticas del concepto de verdad. Estas extensiones se irán revisando mediante el esquema-T dado por (1.6), el cual funcionará entonces, no ya como regla de aplicación sino como una regla de revisión. Veamos entonces cómo funciona. Tomemos por caso las oraciones (M), y la siguiente:

(H) (H) es verdadera.

La l gica de la verdad.indd 126 04/07/2014 13:47:18

Como se ha mencionado en capítulos anteriores, (H) es conocida como la 'oración del honesto', pues dice de sí misma que es verdadera. Su instancia correspondiente del esquema T está dada por:

(1.11) (H) es verdadera $=_{df}$ (H) es verdadera

Atendamos al razonamiento informal que normalmente asociamos a (M) y (H). Para saber si ambas caen bajo la extensión del concepto de verdad, debemos evaluar el *definiens* de (1.10) y (1.11). Esta evaluación nos fuerza a determinar previamente si ellas mismas están o no en la extensión del predicado veritativo. Dado que no disponemos de esta información debemos hipotetizarla.

Se presentan cuatro opciones diferentes: o bien ambas pertenecen a la extensión, o bien ninguna, o bien sólo una de ellas. Llamemos a la primera 'hipótesis 0' y razonemos de acuerdo con ella. Dado que hemos supuesto que (M) es verdadera, el *definiens* en (1.10) resulta falso y, por ende, no pertenece a la (nueva) extensión del predicado de verdad. En cuanto al honesto, como es verdadera, el *definens* en (1.11) también lo es. En consecuencia, resulta verdadera nuevamente. Así, la hipótesis 0 da lugar a una nueva extensión hipotética del predicado de verdad que denominaremos 'hipótesis 1', la cual contiene a (H) pero ya no a (M). Esta hipótesis puede revisarse también. Ahora el *definiens* en (1.10) será verdadero, al igual que el *definiens* en (1.11), con lo cual ambas oraciones quedarán dentro de la extensión del concepto de verdad en la hipótesis 2, finalizando una nueva etapa de revisión.

Normalmente el argumento asociado a la oración del mentiroso termina aquí, precisamente con la conclusión de que resulta ser verdadera y falsa. No obstante, es evidente que la hipótesis 2 es idéntica a la hipótesis 0, la cual al ser revisada nos conduciría nuevamente a la hipótesis 1 y así sucesivamente, como se muestra en el siguiente gráfico de revisión:

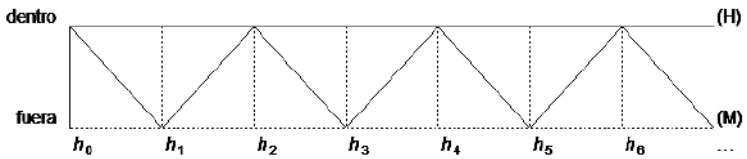


Gráfico 1

La revisión, lejos de asentarnos en un valor, nos conduce a una oscilación entre la verdad y la falsedad de (M). Se observa así, no una inconsistencia en la noción de verdad, sino el fenómeno de "inestabilidad semántica" antes mencio-

La l gica de la verdad.indd 127 04/07/2014 13:47:18

nado. La divergencia entre la semántica de '$=_{df}$' –profundamente intensional, pues da lugar a una definición y fija por tanto el significado– y el bicondicional material bloquea el argumento del mentiroso hacia una contradicción y, al mismo tiempo, da cuenta del carácter patológico de esta oración.

El punto de partida ha sido sólo una de las hipótesis posibles. ¿Qué tanto podemos concluir a partir de allí? ¿No introduce ello arbitrariedad? Si prestamos atención únicamente a la oración del mentiroso, no parece ser así. Si hubiéramos comenzado con la hipótesis 1 en lugar de con la hipótesis 0, podríamos observar también la alternación entre ambas hipótesis, tan sólo que la secuencia de revisión hubiera comenzado en un punto diferente. Pero la situación no es la misma si atendemos a la oración del honesto. En este caso, la hipótesis con que partimos determina crucialmente el resultado del proceso de revisión. Si consideramos ahora otra hipótesis inicial que denominaremos 'hipótesis 0'' en la cual (H) se encuentre fuera de la extensión del predicado de verdad, en una etapa de revisión sucesiva 1′ el *definiens* en (1.11) resultaría falso, permaneciendo así fuera de la extensión del predicado veritativo en la hipótesis 1′. Tal como podrá comprobar el lector, (H) queda fuera de la extensión de dicho predicado a lo largo de las sucesivas iteraciones del proceso de revisión también.

Vemos entonces que el proceso de revisión depende de modo crucial de la hipótesis con la que se decida comenzar. Por otra parte, podemos observar que el proceso de revisión puede concluir de distintas maneras. O bien nunca estabilizarse, como en el caso de la oración del mentiroso que oscila entre verdadero y falso, o bien eventualmente hacerlo, ya sea en verdadero o en falso, como vimos en el caso del honesto, o bien siempre hacerlo en una y la misma de estas categorías, como es el caso de (1.7) cuya comprobación quedará a cargo del lector. Si al finalizar del proceso de revisión basado en cada hipótesis alternativa una oración se estabilizó siempre dentro de la extensión del predicado veritativo, diremos que es categóricamente verdadera. Si, en cambio, una oración se estabilizó siempre fuera de la extensión del predicado de verdad, diremos que es categóricamente falsa. Finalmente, si una oración no se comporta de ninguno de esos modos, diremos que es patológica.

A modo de resumen de esta primera sección, si las instancias del esquema-T son consideradas definiciones parciales, la verdad debe ser un concepto circular. Lejos de tornase ilegítimo o inexistente a causa de su circularidad, buena parte del comportamiento del concepto de verdad, tanto en casos ordinarios como en casos patológicos, puede ser explicado gracias a esta característica.

La l gica de la verdad.indd 128 04/07/2014 13:47:18

Ejercicios para la subsección 1.6

1. Considere la siguiente oración de Curry:
   (C) Si (C) es verdadera entonces los Reyes Magos existen.
   Sabiendo que los Reyes Magos no existen, evalúe cómo resultará un proceso de revisión para (C) comenzando con cada una de las extensiones hipotéticas posibles para la noción de verdad –esto es, una a la cual (C) pertenece y otra a la que no.)
2. Evalúe cómo resultará un proceso de revisión de la hipótesis vacía (ninguna oración pertenece inicialmente a la extensión de la verdad) para las oraciones '(M) es verdadera', '(H) es verdadera', '(M) es verdadera o (H) es verdadera', '(M) es verdadera y (H) es verdadera' y 'Alguna de las oraciones a considerar en este ejercicio no es verdadera'. Confeccione un gráfico de revisión (como el gráfico 1) para cada oración.
3. Evalúe el comportamiento de las oraciones (M) y (C) en el proceso de revisión de la hipótesis según la cual ambas oraciones se encuentran dentro de la extensión del concepto de verdad inicialmente. Confeccione un gráfico de revisión para cada oración.
4. Evalúe el comportamiento de la oración (1.7) en el proceso de revisión de una hipótesis que la contenga y de otra que no. Confeccione un gráfico de revisión en cada caso.

2. Una presentación formal de la teoría revisionista de la verdad

2.1 La teoría de las definiciones de Gupta y Belnap

Tal como anticipamos, la teoría revisionista de la verdad es el resultado de aplicar la teoría de la definición desarrollada por Gupta y Belnap (1993)[48] a la noción de verdad. A continuación daremos brevemente una idea de cómo

48. Véase Gupta y Belnap (1993: cap. 5).

La l gica de la verdad.indd 129 04/07/2014 13:47:18

esta teoría funciona, para luego enfocar nuestra atención en su aplicación al concepto de verdad.

Sea L un lenguaje de primer orden que llamaremos 'lenguaje base' y G un predicado monádico que no le pertenece, introducido para expresar la nueva noción que se quiere definir.[49] L^+ es el lenguaje que resulta de incorporar G a L. Introducimos entonces el nuevo concepto mediante una definición (o conjunto de definiciones parciales) para el predicado G que lo expresa de la siguiente forma:

(2.1) $\quad \mathsf{Gx} =_{\mathrm{df}} \mathsf{A(x,G)}$

donde A es una fórmula de L^+ con a lo sumo una variable libre x y con posibles ocurrencias de G. Luego, la teoría permite definiciones circulares, lo cual la pone en condiciones de lidiar con la noción de verdad.

Puesto que (2.1) constituye una definición para G, debe fijar el significado de este predicado en todo modelo. Sea M un modelo clásico cualquiera para L.[50] Lo denominamos 'modelo base'. Todo modelo base puede ser visto como una interpretación parcial para L^+ en la cual el único símbolo no lógico que carece de interpretación es G, el predicado a definir. El objetivo es dar con un conjunto de oraciones correctamente asertables de L^+ bajo la interpretación de los símbolos no lógicos de L dada por M, en el cual G se comporte de acuerdo con la definición dada por (2.1).

Usualmente llevaríamos a cabo esta tarea buscando una expansión (M,S) de M para todo el lenguaje L^+ que asigne la extensión S a G respetando la definición dada por (2.1), de modo tal que los miembros de S sean aquellos elementos de $|M|$ –el dominio de M– que satisfagan $\mathsf{A}(x,\mathsf{G})$ de acuerdo con este modelo. Sin embargo, como hemos notado en la primera sección, $\mathsf{A}(x,\mathsf{G})$ podría contener ella misma ocurrencias G y, por tanto, podría no bastar en cada caso con la información provista por el modelo base para decidir la extensión de G sino que sería preciso saber previamente algo de esta misma extensión.

49. De acuerdo con la teoría original, podríamos contar en lugar de G con cualquier cantidad finita de predicados no necesariamente monádicos a definir. Aquí optamos por un único predicado de aridad 1 por cuestiones de simplicidad relacionadas con nuestro proyecto general.
50. De acuerdo con la teoría original, M podría no ser clásico sino asignar tres o más valores de verdad a las oraciones de L. Aquí nos limitaremos a interpretaciones bivalentes para mostrar que es posible un lenguaje bivalente que contiene su propio predicado de verdad.

La l gica de la verdad.indd 130 04/07/2014 13:47:18

Tal como hemos sugerido en la primera sección, debemos comenzar por una extensión hipotética arbitraria S_0 para G y luego revisarla de acuerdo con (2.1), obteniendo una nueva extensión hipotética S_1 para G: pertenecerán a S_1 todos los miembros de $|M|$ que satisfagan la fórmula A(x,G), no de acuerdo a M sino a su expansión (M,S_0). Luego, para cada modelo base M, (2.1) nos sirve de guía para la construcción de una *regla de revisión* δ_M que asigna nuevas extensiones hipotéticas a extensiones S hipotetizadas previamente del siguiente modo:

$$(2.2) \qquad \delta_M(S) = \{ d \in |M| : (M,S) \vDash A([d],G) \}$$ [51]

donde $[d]$ denota d de acuerdo con M.

Mediante sucesivas aplicaciones de δ_M mejoraremos nuestra hipótesis original, obteniendo mayor conocimiento acerca de la extensión del concepto definido por (2.1). Este proceso se denomina 'proceso de revisión' y la secuencia de modelos extendidos 'secuencias de revisión'. Si a lo largo del proceso algunos elementos de $|M|$ se estabilizan dentro de la extensión asignada a G, diremos que caen bajo el nuevo concepto en esa secuencia de hipótesis, mientras que de los que se estabilicen fuera diremos que no son Gs en ese contexto.

Como anticipamos, es posible que estas estabilidades dependan en buena medida de la extensión de G hipotetizada al comienzo del proceso, y no sólo de M y (2.1). Para garantizar que exclusivamente (2.1) fije el significado de G en cada M, debemos llevar a cabo un proceso de revisión con cada hipótesis inicial posible, esto es, por cada subconjunto de $|M|$, y extraer consecuencias de todas las secuencias obtenidas simultáneamente. Como veremos más adelante, hay diferentes modos de extraer consecuencias a partir de allí.

A continuación haremos una presentación formal de la aplicación de la teoría de las definiciones recién esbozada a la noción de verdad.

Ejercicios para la subsección 2.1

1. Sea L un lenguaje de primer orden cuyos símbolos no lógicos son F y H y sea L^+ el resultado de incorporar a L un nuevo predicado G. Sea M

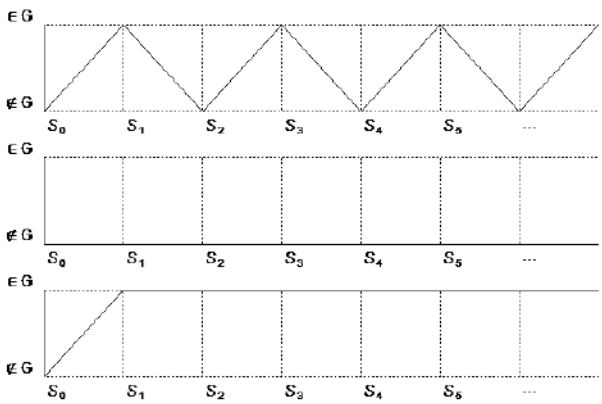
51. A diferencia de otros capítulos, en lugar de escribir $V_M(A)=1$ para indicar que A es verdadera en un modelo M, emplearemos la siguiente notación por cuestiones de legibilidad: $M \vDash A$.

La l gica de la verdad.indd 131 04/07/2014 13:47:18

un modelo de L tal que $|M|=\{a,b,c\}$, $F^M=\{a\}$ y $H^M=\{a,c\}$. Considere la siguiente definición en L^+:[52]

(2.3) $\quad Gx =_{df} Fx \vee (Hx \wedge \neg Gx)$

(a) Escriba los respectivos primeros pasos de las secuencias generadas por el proceso de revisión de las hipótesis $S_0 = \emptyset$ y $S'_0 = \{a, b, c\}$.
(b) Los gráficos siguientes representan la evolución de la pertenencia o no a la extensión de G de cada miembro de $|M|$ a lo largo de las primeras etapas del proceso de revisión de S_0. Indique a qué elemento corresponde cada uno:



2. Sea L un lenguaje de primer orden que contiene a '0' como constante de individuo y a '−' como símbolo diádico de función; y L^+ el lenguaje que resulta de incorporar a L un nuevo predicado monádico N. Sea M un modelo de L tal que $|M| = \mathbb{Z}$, el conjunto de los números enteros, '0' es interpretado con el número 0 y '−' es interpretado como la resta. Considere la siguiente definición en L^+:

(2.4) $\quad Nx =_{df} x = 0 \vee N(x - 1)$

(a) ¿Cuál es la regla de revisión a la cual (2.4) da lugar?
(b) Tras un proceso de revisión de la hipótesis vacía, ¿qué objetos del dominio de M resultan dentro de la extensión de N?

52 Este ejercicio ha sido extraído de un ejemplo ofrecido por Gupta & Belnap (1993), cap. 4.

La l gica de la verdad.indd 132 04/07/2014 13:47:19

(c) Tras un proceso de revisión de la hipótesis $S = \mathbb{Z}$, ¿qué elementos de $|M|$ resultan ser $\mathbf{N}$?
(d) ¿Existe una hipótesis S que dé lugar a una extensión diferente de aquella que se obtiene en los incisos anteriores?

2.2 Una definición circular de 'verdad'.

Gupta y Belnap (1993) aplican su teoría de la definición al concepto de verdad para cualquier lenguaje de primer orden que contenga nombres o nombres de códigos para todas sus expresiones y sea capaz de expresar su propia sintaxis, dado que los objetos susceptibles de estar en la extensión del predicado veritativo son de índole lingüística. No obstante, aquí nos limitaremos al lenguaje L de la aritmética de primer orden y utilizaremos números de Gödel como códigos para las expresiones del lenguaje mismo, como es habitual. Las razones para hacerlo de este modo yacen principalmente en preservar la legibilidad del capítulo y en la costumbre de tomar la aritmética como base de cualquier teoría semántica a modo de ejemplo. Así, lo presentado aquí permitirá comparar la teoría revisionista de la verdad con muchas otras teorías semánticas y axiomáticas que aparecen en la literatura y, particularmente, con aquellas presentadas en este libro.

2.2.1 El lenguaje base y sus interpretaciones

Sea el lenguaje base L un lenguaje de predicados de primer orden con identidad con una única constante de individuo '$\mathbf{0}$', un único predicado diádico '$<$' y una cantidad finita de símbolos de función para expresar las funciones recursivas que necesitaremos más adelante, incluyendo 's', para la función monádica sucesor y '$+$' y '$\times$' para las funciones diádicas suma y multiplicación, respectivamente. L^+ es el resultado de incorporar el predicado monádico $\mathbf{Tr}$ a L, predicado que expresará al finalizar el proceso la noción de verdad que queremos definir.

Sea M un modelo base, esto es, una interpretación de L. Escribimos '$[\mathbf{n}]$' como una abreviatura del término compuesto por $\mathbf{0}$ precedido por n ocurrencias de s y lo denominamos 'numeral de $\mathbf{n}$', del $\mathbf{n} \in |M|$ que M asigna a $[\mathbf{n}]$ como su interpretación. Cuando no dé lugar a confusión omitiremos los corchetes.

La l gica de la verdad.indd 133 04/07/2014 13:47:19

Al igual que en otros capítulos de este libro, emplearemos letras de imprenta mayúsculas A, B, etc. para nombrar o esquematizar fórmulas de L^+, letras griegas minúsculas α, β, etc. para nombrar o esquematizar números ordinales y letras cursivas mayúsculas *M*, *N*, etc. para nombrar o esquematizar interpretaciones de *L*.

En cada modelo emplearemos miembros del dominio a los cuales les corresponde un numeral como códigos para las oraciones, fórmulas, términos y símbolos de L^+, de modo tal que en toda interpretación el número de Gödel de cada uno de estos objetos lingüísticos A es el miembro del dominio que esta interpretación asigna a un numeral fijo 'A' del lenguaje. Por ejemplo, podemos decir que [m] es un nombre para A en L^+, independientemente del modelo base *M* que tomemos, pues en cada caso seleccionamos al m ∈ |*M*| que *M* asigna a [m] como su interpretación.

2.2.2 Una regla de revisión

Puesto que deseamos que Tr sea un predicado de verdad, debemos proveer una definición o conjunto de definiciones parciales para la noción de verdad. Como dijimos en la introducción, el esquema T de Tarski constituye una definición de esta noción de acuerdo con Gupta y Belnap. En consecuencia, consideraremos las siguientes definiciones parciales:

(2.5) $\quad \mathrm{Tr}(\text{'A'}) =_{df} \mathrm{A}$

donde A es cualquier oración de L^+. Dado un modelo base *M*, el objetivo ahora es dar con el conjunto de oraciones de L^+ correctamente afirmables bajo la interpretación que *M* ofrece de los símbolos no lógicos de *L* y teniendo en cuenta que Tr, al cumplir con (2.5), debe comportarse como un predicado de verdad para todo el lenguaje L^+. Idealmente, llevaríamos esto a cabo dando con una expansión (*M*,*S*) de *M* a todo L^+ en la cual *S* es la extensión asignada a Tr. Para ello, es preciso que en *S* estén todos los códigos de oraciones de L^+ que son verdaderas en (*M*,*S*), pero esto último depende a su vez de qué objetos de |*M*| pertenezcan a *S*. Esto se debe, como ya hemos visto, al carácter circular de (2.5).

Al igual que en el caso de (2.1), (2.5) fija el significado de Tr en cada modelo base *M* proveyendo una regla de revisión τ_M que asigna a cada interpretación hipotética de Tr una nueva interpretación hipotética, a la cual pertenecen todos los códigos de oraciones que resultaban verdaderas en la interpretación anterior.

La l gica de la verdad.indd 134 04/07/2014 13:47:19

En lugar de dar con una única expansión (M,S) para todo L^+ que haga de $\mathbf{Tr}$ un predicado veritativo, tenemos más bien una secuencia de expansiones, cada una de las cuales constituye una revisión de las anteriores. Si existiera un punto fijo para cada secuencia de revisión basada en M, la idea de obtener una expansión de este modelo para todo el lenguaje L^+ sería razonable. Sin embargo, dado que la lógica subyacente es la clásica, veremos que tales puntos fijos no existen en este marco.

DEFINICIÓN 3.1 (τ_M) τ_M es una *regla de revisión* basada en M tal que τ_M: $P(|M|)\rightarrow P(|M|)$[53] y

$\tau_M(S) = \{\mathbf{d} : (M,S)\vDash \mathbf{A}$ y $\mathbf{d}$ es el número de Gödel de $\mathbf{A}\}$

Notemos que el proceso de revisión deja fuera de la extensión de $\mathbf{Tr}$ a todos los miembros de $|M|$ que no codifiquen una oración de L^+, ya que son descartados por una sola aplicación de τ_M. Quisiéramos afirmar que en cada nueva aplicación de la regla obtenemos una extensión para el predicado veritativo más adecuada que la anterior, pero como veremos más adelante, este no siempre es el caso.

2.3 Secuencias de revisión

El proceso de revisión *generado por* una hipótesis inicial $S_0 \subseteq |M|$ consiste en la aplicación sucesiva de la regla de revisión τ_M a S_0, y da lugar a una secuencia de revisión, esto es, cierta secuencia de extensiones posibles para $\mathbf{Tr}$.

EJEMPLO 3.2 Tomemos la interpretación estándar de L –el modelo N en el cual $|N| = \mathbb{N}$ y $\mathbf{0}, <, ', +, \times$ y todos los símbolos de función restantes reciben su significado usual– como modelo base. Sea cual fuere la hipótesis inicial por la cual optemos, (el código de)[54] $\mathbf{0=0}$ pertenecerá a $\tau_N(S_0)$, la nueva extensión de Tr, por la definición 3.1, pues $(N,S_0)\vDash \mathbf{0=0}$ ya que la oración pertenece a L y

53. $P(|M|)$ denota el conjunto potencia de M.

54. Frecuentemente identificaremos las fórmulas de L^+ con sus respectivos códigos por cuestiones de legibilidad, si bien debe entenderse que sólo los códigos de oraciones pueden pertenecer a la extensión del predicado veritativo, no las oraciones mismas.

La l gica de la verdad.indd 135 04/07/2014 13:47:19

es verdadera en *N*. Como esto último vale para cualquier expansión (*N*,*S*) de *N*, 0=0 permanecerá en la interpretación de Tr en cada paso ulterior del proceso de revisión.

Tr('0=0') también permanecerá en la interpretación de Tr a lo largo de la secuencia de revisión, pero sólo a partir del segundo paso, si $0=0 \notin S_0$. Análogamente, Tr('Tr('0=0')') se estabilizará con certeza dentro de la extensión del predicado veritativo en la secuencia del tercer paso en adelante.

Sea $f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ tal que $f(x,0) = x$ y $f(x,y+1)$ es el código de la fórmula $Tr(f(x,y))$. f es evidentemente una función recursiva. Sea [f] el símbolo de función diádico que la expresa en *L* y, por ende, en L^+. [f]('A',0)='A', [f]('A',1)='Tr('A')', [f]('A',2)='Tr('Tr('A')')', etc. son identidades verdaderas en *N*. Por cuestiones de legibilidad, frecuentemente escribiremos $Tr^0('A')$ en lugar de A y $Tr^n('A')$ en lugar de $Tr([f]('A',n-1))$ si $n > 0$.

Sabemos que $Tr^n('0=0')$ se estabilizará dentro de la extensión de Tr a lo sumo en el paso $n+1$ del proceso de revisión. Al contrario, $0=1$ no pertenecerá a $\tau_N(S_0)$ aún perteneciendo a S_0, por la definición 3.1 nuevamente. Lo mismo podemos decir de $Tr^n('0=1')$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Queda claro a la luz de este ejemplo que las secuencias de revisión no deben comprender sólo un número finito m de pasos. Si culminamos el proceso de revisión en el paso m, no tenemos garantías de que todas las oraciones de la forma $Tr^n('0=0')$ estén dentro de la extensión del predicado veritativo al finalizar el proceso, sino sólo aquellas en las cuales $n < m$. Sin embargo, si nos comprometemos con $Tr^{m-1}('0=0')$ parece que lo mismo deberíamos hacer con $Tr^m('0=0')$, obedeciendo la definición del predicado de verdad. Es preciso que el proceso de revisión continúe al menos hasta alcanzar un ordinal límite. Veremos que ω –el primer ordinal límite– tampoco es suficiente.

EJEMPLO 3.3 Sea el modelo base como en el ejemplo 3.2 y consideremos la oración $\forall x Tr^{x+1}('0=0')$, que afirma que todas las iteraciones de Tr sobre $0=0$ son verdaderas. Si bien es intuitivamente verdadera, dado lo dicho en el párrafo anterior, sabemos que no contamos necesariamente con esta generalización dentro de la extensión de Tr en ningún estado finito de una secuencia de revisión basada en *N*. No obstante, como cada una de sus instancias permanece allí a partir de

La l gica de la verdad.indd 136 04/07/2014 13:47:19

algún paso finito, sabemos que en ω todas pertenecerán a la extensión de Tr y, por tanto, nuestra generalización será verdadera allí. Por ende, recién en ω + 1 contaremos con $\forall x Tr^{x+1}(\text{`0=0'})$ dentro de la extensión del predicado veritativo.

La siguiente tabla representa mediante los valores t y f el valor semántico de 0=0, de cada $Tr^{n+1}(\text{`0=0'})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\forall x Tr^{x+1}(\text{`0=0'})$ y $Tr(\text{`}\forall x Tr^{x+1}(\text{`0=0'})\text{'})$ en cada estado del proceso de revisión generado por la hipótesis ∅:[55]

	0	1	2	3	...	n	...	ω	ω+1	...
0=0	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t
$Tr^1(\text{`0=0'})$	f	t	t	t	t	t	t	t	t	t
$Tr^2(\text{`0=0'})$	f	f	t	t	t	t	t	t	t	t
...										
$Tr^n(\text{`0=0'})$	f	f	f	f	...	t	t	t	t	t
...										
$\forall x Tr^{x+1}(\text{`0=0'})$	f	f	f	f	f	f	...	t	t	t
$Tr(\text{`}\forall x Tr^{x+1}(\text{`0=0'})\text{'})$	f	f	f	f	f	f	f	f	t	t

Consideremos ahora el proceso de revisión generado por $S = \{Tr(\text{`}Tr(\text{`0=0'})\text{'})\}$. En la etapa 1, 0=0 ingresará a la extensión del predicado de verdad. En cambio, Tr('0=0') saldrá de la extensión, pues $(N,S) \nvDash Tr(\text{`0=0'})$, siendo que $0=0 \notin S$. Mientras que el ingreso de 0=0 representa una mejoría de la extensión de Tr, el egreso de Tr('0=0') implica claramente un desmejoramiento de la extensión de Tr. Este hecho no señala un defecto del proceso de revisión, pues este error se corregirá en una etapa posterior, sino que muestra que no siempre cada etapa sucesora en el proceso provee un mejor candidato para la extensión del concepto de verdad que su predecesora.[56]

Es preciso entonces que continuemos el proceso de revisión en niveles transfinitos. Por cuestiones de simplicidad, lidiaremos únicamente con secuencias de longitud On, i.e. la longitud de todos los ordinales. Esto nos permitirá ver de un modo unificado las diversas teorías de la verdad que Gupta y Belnap (1993) presentan.

55. Recuérdese que $Tr^{n+1}(\text{`0=0'})$ y $\forall x Tr^{x+1}(\text{`0 = 0'})$ son licencias notacionales para Tr([f]('0 = 0',[n])) y ∀xTr([f]('0=0',x)), respectivamente.

56. Un ejemplo similar es empleado por Belnap (1982) precisamente para notar que Gupta (1982) se equivoca cuando afirma que cada etapa provee un mejor candidato para la extensión de la verdad que la etapa anterior.

La l gica de la verdad.indd 137 04/07/2014 13:47:19

Dar la extensión del predicado de verdad para pasos límite no es siempre sencillo. Como hemos visto, el esquema-T sirve muy bien para la formulación de una regla que indique cómo pasar de una extensión hipotética a su sucesora, pero no dice demasiado acerca de qué debemos hacer en los límites, como ω. Es natural pensar que debemos acumular los datos obtenidos en todos los pasos anteriores de la secuencia: las oraciones que se han estabilizado dentro de la extensión de Tr deben permanecer allí en el paso límite, y las que se han estabilizado fuera deben permanecer fuera. Sin embargo, no toda oración del lenguaje cae siempre bajo una u otra de estas categorías, como vimos en la primera sección.

EJEMPLO 3.4 (El mentiroso) Tomemos nuevamente N como modelo base. Puesto que el lema de diagonalización es verdadero en esta interpretación, sabemos que para todo $S \subseteq |N|$ existe una oración M del Mentiroso en L^+ equivalente a una oración que dice que M no es verdadera, esto es:

(2.6) $\qquad (N,S) \vDash \mathsf{M} \equiv \neg \mathsf{Tr}(\text{`M'})$

Al igual que en la contraparte informal desarrollada en 1.6, si comenzamos el proceso de revisión con una hipótesis S_0 tal que $\mathsf{M} \notin S_0$, $(N,S_0) \vDash \neg \mathsf{Tr}(\text{`M'})$ y, por (2.6), $(N,S_0) \vDash \mathsf{M}$. Por la definición 3.1, $\mathsf{M} \in \tau_N(S_0)$. Pero entonces sabemos que $(N,\tau_N(S_0)) \vDash \mathsf{Tr}(\text{`M'})$ y, en virtud de (2.6), $(N,\tau_N(S_0)) \nvDash \mathsf{M}$, con lo cual $\mathsf{M} \notin \tau_N(\mathsf{t}_N(S_0))$ y volvemos a donde empezamos con respecto a esta oración. M ingresa a la extensión de Tr en los pasos impares y egresa en los pares. Si, por el contrario, hubiéramos empezado con una hipótesis S_0' tal que $\mathsf{M} \in S_0'$, el resultado habría sido simétricamente opuesto: M estaría en la extensión de Tr en los estados pares y fuera en los impares. El gráfico 2 representa la evolución de la pertenencia de M a la extensión de Tr en cada estado del proceso de revisión generado por las hipótesis S_0 y S_0':

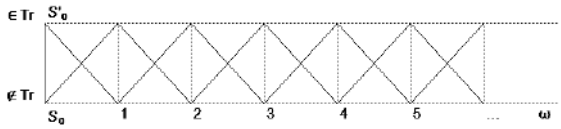


Gráfico 2

La l gica de la verdad.indd 138 04/07/2014 13:47:20

Oraciones como M no se estabilizarán ni dentro ni fuera de la extensión de Tr en ningún punto de la secuencia previo a cada ordinal límite. ¿Qué hacemos con ellas allí? En la literatura encontramos diversas propuestas rivales, llamadas 'políticas de bootstrapping',[57] las cuales discutiremos más adelante.

Por el momento nos detendremos en la política elegida por Gupta y Belnap (1993), que consiste en dejar total libertad a estas oraciones en pasos límites: se las puede colocar dentro o fuera de la extensión de Tr, según se desee. Luego, no basta con indicar un modelo base y una hipótesis inicial para determinar todos los estados de una secuencia de revisión, sino que es preciso adicionalmente saber qué se hará con cada una de las oraciones inestables en cada estado límite. Esto último estará dado en cada secuencia por una función B que asigna a cada ordinal límite λ un conjunto $B(\lambda) \subseteq |M|$, donde podrán estar o no las oraciones que no se han estabilizado antes de λ.

DEFINICIÓN 3.5. (Secuencias de revisión) Si M es un modelo base y B una función que asigna un conjunto $B(\lambda) \subseteq |M|$ a cada ordinal límite λ, $[M,S,B]$ es una *secuencia de revisión* basada en M si y sólo si asigna a cada ordinal α un conjunto $S_\alpha \subseteq |M|$ tal que:

1. si $\alpha = 0$, $S_\alpha = S$;

2. si $\alpha = \beta + 1$ para algún β, $S_\alpha = \tau_M(S_\beta)$;

3. si α es un ordinal límite, $S_\alpha = (S^{\top}_{\alpha} \cup B_\alpha) - S^{\perp}_{\alpha}$, donde

$$S^{\top}_{\alpha} = \{d \in |M| : \exists\beta < \alpha\, \forall\gamma\, (\beta \leq \gamma < \alpha \Rightarrow d \in S_\gamma)\}$$

$$S^{\perp}_{\alpha} = \{d \in |M| : \exists\beta < \alpha\, \forall\gamma\, (\beta \leq \gamma < \alpha \Rightarrow d \notin S_\gamma)\}$$

La cláusula 1 de esta definición nos indica que en una secuencia de revisión $[M,S,B]$ S debe ser la hipótesis con la cual comencemos el proceso de revisión. La segunda cláusula nos señala cómo obtener la extensión de Tr en pasos sucesores a partir del paso anterior: empleando la regla de revisión τ_M. La cláusula 3 nos muestra cómo obtener la extensión de Tr en estados límites: esta consiste de todas las oraciones de L^+ que se estabilizaron previamente dentro de la extensión

57. La introducción del término en la discusión corresponde a Belnap (1982). Hemos decidido no traducirlo ni italizarlo por tratarse de un término técnico.

La l gica de la verdad.indd 139 04/07/2014 13:47:20

de Tr (los miembros de S^{T}_{α}), más las oraciones que el bootstraper provisto por B agregue en este caso (los miembros de $B(\alpha)$), menos aquellas oraciones que se estabilizaron previamente fuera de la extensión de Tr (los miembros de $S^{\perp}_{\alpha}$). Luego, ante la presencia de oraciones inestables como M, aun especificando un modelo base M y una hipótesis inicial S, no existe una única secuencia de revisión basada en M y generada por S sino varias, según las elecciones que tomemos para aquellas oraciones en cada ordinal límite. Sin embargo, por cuestiones de legibilidad, en aquellos casos en los cuales no sea relevante esta elección omitiremos B y hablaremos de las secuencias mediante la especificación del modelo base y la hipótesis inicial únicamente, esto es, utilizaremos la notación $[M,S]$.

EJEMPLO 3.6 Retomando el ejemplo 3.4, de acuerdo con la definición 3.5, podemos optar por incorporar M a $B(\omega)$ o no hacerlo. Puesto que M no se estabiliza ni dentro ni fuera de la extensión de Tr en un estado previo a ω, siguiendo el primer camino M quedará dentro de S_{ω}, mientras que en el segundo quedará fuera. En cambio, como $0=1$ se estabiliza fuera de la extensión de Tr en un estado previo a ω, $0=1 \in S^{\perp}_{\omega}$, con lo cual aun incorporándola a $B(\omega)$ tendremos que $0=1 \notin S_{\omega}$. El gráfico 3 representa las dos elecciones posibles para M en el estado ω, dando lugar a dos secuencias diferentes basadas en N y generadas por $\emptyset$:

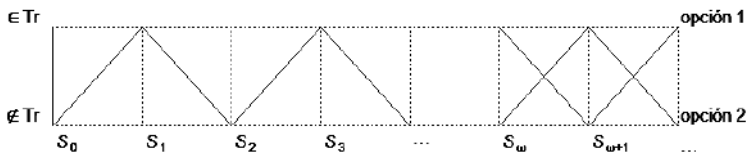


Gráfico 3

Ejercicios para la subsección 2.3

1. Sea M como en (2.6) y sea C una oración de Curry tal que, para todo $S \subseteq |N|$:
   (2.7) $(N,S) \models C \equiv (Tr(\text{`C'}) \supset M)$
   (a) Indique una secuencia de revisión $[N,S,B]$ (una hipótesis inicial S y $B(\lambda)$ para cada ordinal límite λ) en la cual M y C no estén nunca ambas

La l gica de la verdad.indd 140 04/07/2014 13:47:20

dentro o ambas fuera de la extensión del predicado de verdad hasta ω y que, de allí en más, suceda lo contrario.

(b) Indique otra secuencia de revisión $[N,S',B']$ en la cual la oración $\mathtt{M} \equiv \mathtt{C}$ sea verdadera en cada paso ($(M,S_\alpha) \vDash \mathtt{M} \equiv \mathtt{C}$ para todo α).

(c) ¿Cuántas secuencias de revisión diferentes en cuanto a $\mathtt{M}$ y $\mathtt{C}$ generadas por $\mathtt{S} = \emptyset$ existen?

2. Considere las oraciones $\mathtt{M}$, $\mathtt{Tr}(\text{`M'})$, $\mathtt{Tr}(\text{`Tr}(\text{`M'})\text{'})$, etc., esto es, todas las instancias de $\mathtt{Tr}^n(\text{`M'})$ con $n \in \mathbb{N}$. Evalúe su comportamiento a lo largo de una secuencia de revisión basada en N en la cual la hipótesis inicial esté dada por $\{\mathtt{Tr}^n(\text{`M'}) : n \in \mathbb{N}\}$.

2.4 Las teorías T^*, $T^\#$ y T^t

Ante la presencia de oraciones como $\mathtt{M}$, las secuencias de revisión no convergen hacia una extensión definitiva del predicado veritativo, sino que continúan oscilando a lo largo de todos los niveles de ordinales.[58] Sin embargo, esto no nos impide obtener resultados categóricos para ciertas oraciones, i.e. aquellas que logran estabilizarse de algún modo a lo largo del proceso. Es importante notar que para extraer este tipo de conclusiones no basta con considerar una única secuencia de revisión para cada modelo base.

EJEMPLO 3.7 (El honesto) Sea N nuestro modelo base. En virtud del lema de diagonalización sabemos que para todo $S \subseteq |N|$ existe una oración $\mathtt{H}$ del Honesto en L^+, equivalente a una oración que dice que $\mathtt{H}$ es verdadera, esto es:

$$(N,S) \vDash \mathtt{H} \equiv \mathtt{Tr}(\text{`H'}) \tag{2.8}$$

Si bien esta oración no es intuitivamente paradójica como sí lo es $\mathtt{M}$, es claramente patológica como notamos en la primera sección, pues su valor de verdad depende exclusivamente de sí misma. Si consideramos que es verdadera entonces

58. En cambio, si el lenguaje no es lo suficientemente expresivo como para permitir autorreferencia, las secuencias de revisión se estabilizarán en un conjunto que será la extensión del predicado de verdad. Para una demostración de este resultado, véase Gupta y Belnap (1993: cap. 6, sec. B).

La l gica de la verdad.indd 141 04/07/2014 13:47:20

será verdadera, y si consideramos que es falsa entonces será falsa; nada en *N* nos indica qué camino debemos tomar. Luego, a la luz de la tesis de la superveniencia parecería que no debiéramos tomar ninguno.

Consideremos la secuencia [*N*,∅]. Luego, $(N,S_0) \nvDash \mathrm{Tr}(\text{`H'})$ y, por (2.8), $(N,S_0) \nvDash \mathrm{H}$, con lo cual $\mathrm{H} \notin S_1$ por la definición 3.5. Iterando este razonamiento una y otra vez, concluimos que $\mathrm{H} \notin S_n$ para todo $n \in \omega$. Luego, $\mathrm{H} \in S^{\perp}{}_{\omega}$ y, por la definición 3.5, $\mathrm{H} \notin S_{\omega}$: el proceso continúa del mismo modo, excluyendo a H de la extensión de Tr. En general, $\mathrm{H} \notin S_{\alpha}$ para cualquier α. Por tanto, ¬H es verdadera a lo largo de toda la secuencia.

Consideremos ahora la secuencia [*N*,{H}]. Empleando un razonamiento análogo al del párrafo anterior, sabemos que H es verdadera en todos los estados de esta secuencia, mientras que ¬H es falsa.

Sólo considerando ambas secuencias presentadas en este ejemplo podemos advertir que no es correcto concluir ni H ni ¬H. Juntas muestran que H es una oración infundada, pues no es exclusivamente el modelo base *N* el que determina el valor de verdad de H, sino que éste depende enteramente de la extensión hipotetizada inicialmente para Tr. Es preciso atender a todas las secuencias de revisión basadas en un modelo para obtener conclusiones definitivas adecuadas acerca del concepto de verdad basado en ese modelo. Gupta y Belnap (1993) presentan tres modos diferentes de llevar a cabo esta tarea, cada uno de los cuales da lugar a una teoría de la verdad diferente: T*, T# y T^c.[59]

*2.4.1 La teoría T**

Este sistema es quizás el más natural de los tres. El concepto central en T* es el de *estabilidad*.

DEFINICIÓN 3.8 (Estabilidad) Si [*M*,*S*] es una secuencia de revisión y A es una oración de L^{+}:

59. T* fue introducida por Belnap (1982), mientras que T^c pertenece originalmente a Gupta (1987) . T#, en cambio, aparece por primera vez en Gupta y Belnap (1993).

La l gica de la verdad.indd 142 04/07/2014 13:47:20

- A es *establemente verdadera* en [*M*,*S*] si y sólo si existe un α tal que, para todo $\beta \geq \alpha$, $(M,S_\beta) \models A$;
- A es *establemente falsa* en [*M*,*S*] si y sólo si existe un α tal que, para todo $\beta \geq \alpha$, $(M,S_\beta) \not\models A$;
- A es *estable* en [*M*,*S*] si y sólo si A es establemente verdadera o establemente falsa en [*M*,*S*].

DEFINICIÓN 3.9 (Validez en T*) Si A es una oración de L^+ y *M* un modelo base:

- A es *válida en* T* *en M* ($M \models^* A$) si y sólo si A es establemente verdadera en toda secuencia de revisión basada en *M*;
- A es *válida en* T* ($\models^* A$) si y sólo si, para todo *M*, A es válida en T* en *M*.

Sea V^*_M el conjunto de todas las oraciones válidas en T* en *M*. V^*_M contiene aquellas oraciones de L^+ que en cada secuencia de revisión basada en *M* logran estabilizarse dentro de la extensión del predicado veritativo a partir de algún punto.

Cada uno de los tres sistemas desarrollados por Gupta y Belnap (1993) constituye una alternativa para la extracción de resultados categóricos del conjunto de posibles procesos de revisión generados por diversas hipótesis sobre un modelo dado. Dado un modelo base, cada teoría induce una clasificación de las oraciones de L^+ en siete categorías exhaustivas y mutuamente excluyentes.

DEFINICIÓN 3.10 (Categorías semánticas en T*) Si A es una oración de L^+ y *M* un modelo base:

A es *categóricamente verdadera en* T* *en M* si y sólo si A es establemente verdadera en toda secuencia de revisión basada en *M*;
A es *categóricamente falsa en* T* *en M* si y sólo si A es establemente falsa en toda secuencia de revisión basada en *M*;
A es *paradójica en* T* *en M* si y sólo si A es inestable en toda secuencia de revisión basada en *M*;

La l gica de la verdad.indd 143 04/07/2014 13:47:20

A es *tf-caprichosa en* T* *en M* si y sólo si A es estable en toda secuencia de revisión basada en *M*, pero establemente verdadera en al menos una y establemente falsa en al menos otra;
A es *tp-caprichosa en* T* *en M* si y sólo si A no es establemente falsa en ninguna secuencia de revisión basada en *M*, pero establemente verdadera en al menos una e inestable en al menos otra;
A es *fp-caprichosa en* T* *en M* si y sólo si A no es establemente verdadera en ninguna en secuencia de revisión basada en *M*, pero establemente falsa en al menos una e inestable en al menos otra;
A es *tfp-caprichosa en* T* *en M* si y sólo si A es establemente verdadera en al menos una secuencia de revisión basada en *M*, establemente falsa en al menos otra e inestable en al menos una tercera.

Llamamos caprichosas a aquellas oraciones en que se exhiben comportamientos diferentes según la hipótesis inicial que se elija para generar la secuencia. Las primeras dos categorías semánticas incluyen, de acuerdo con Gupta y Belnap (1993), aquellas oraciones categóricas, esto es, no patológicas, mientras que las cinco restantes constituyen una clasificación de las oraciones patológicas según el tipo de patologicidad que exhiben. Mediante esta subdivisión, la teoría revisionista de la verdad logra dar una explicación adecuada de oraciones como el mentiroso y el honesto, en lugar de meramente incluirlas dentro de la categoría de lo problemático, como la teoría de punto fijo de Kripke.[60]

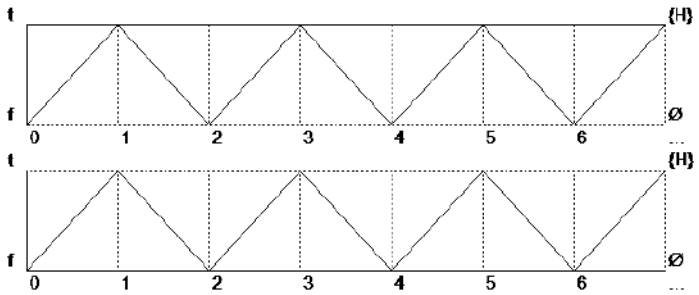
EJEMPLO 3.11 (Un honesto alternativo) Sea *N* el modelo base. Consideremos adicionalmente las oraciones $0=0$, $0=1$, M, H, $M \vee H$, $M \wedge H$. Como es sabido, la clase de puntos fijos en *N* de un predicado monádico de L^+ –como Tr– no es recursiva. Por lo tanto, tenemos certeza de la existencia de una nueva oración H′ del honesto independiente de (o, lo que es lo mismo, no equivalente a) H tal que para todo $S \subseteq |N|$:

(2.9) $$(N,S) \vDash H' \equiv \mathrm{Tr}(\text{‘H’})$$

60. Véase Kripke (1975) y el segundo capítulo de este libro para una explicación detallada.

La l gica de la verdad.indd 144 04/07/2014 13:47:20

0=0 es un ejemplo de oración categóricamente verdadera en *N*, pues es establemente verdadera en toda secuencia basada en este modelo. 0=1 es, en cambio, categóricamente falsa por ser establemente falsa en toda secuencia. M resulta paradójica, ya que oscila en cada secuencia de revisión, como muestra el gráfico 3 del ejemplo 3.6. H, por su parte, pertenece a la categoría de las oraciones tf-caprichosas, pues es establemente verdadera en algunas secuencias y establemente falsa en las restantes, como señalamos en el ejemplo 3.7. Los gráficos 4 y 5 representan la evolución de los valores semánticos de M ∨ H y M ∧ H, respectivamente, a lo largo de las secuencias de revisión generadas por las hipótesis Ø y {H}:



Gráficos 4 y 5

Es sencillo ver que en toda secuencia M ∨ H o bien oscilará o bien será establemente verdadera, mientras que M ∧ H oscilará o será establemente falsa. Luego, la primera es tp-caprichosa y la segunda fp-caprichosa de acuerdo con la definición 3.10. H′ ∨ (H ∧ M), en cambio, es tfp-caprichosa, como podrá comprobar el lector al realizar los ejercicios para esta subsección.

2.4.2 La teoría T#

El concepto central en T# es el de *estabilidad cercana*, en lugar del de estabilidad *simpliciter*. Como veremos más adelante, si bien no resulta tan natural como T* y tiene algunas consecuencias indeseables, este sistema validará muchos principios deseables para el predicado de verdad que los otros sistemas no validan.

La l gica de la verdad.indd 145 04/07/2014 13:47:21

DEFINICIÓN 3.12 (Estabilidad cercana) Si [*M*,*S*] es una secuencia de revisión y A es una oración de L^+:

A es *cercanamente establemente verdadera* en [*M*,*S*] si y sólo si existe un α tal que, para todo $\beta \geq \alpha$ hay un natural m tal que, para todo $n \geq m$, $(M,S_{\beta+n}) \models A$;

A es *cercanamente establemente falsa* en [*M*,*S*] si y sólo si existe un α tal que, para todo $\beta \geq \alpha$ hay un natural m tal que, para todo $n \geq m$, $(M,S_{\beta+n}) \not\models A$;

A es *cercanamente estable* en [*M*,*S*] si y sólo si A es cercanamente establemente verdadera o cercanamente establemente falsa en [*M*,*S*].

DEFINICIÓN 3.13 (Validez en $T^{\#}$) Si A es una oración de L^+ y *M* un modelo base:

A es *valida en* $T^{\#}$ *en M* ($M \models^{\#} A$) si y sólo si A es cercanamente establemente verdadera en toda secuencia de revisión basada en *M*;
A es *valida en* $T^{\#}$ ($\models^{\#} A$) si y sólo si, para todo *M*, A es valida en $T^{\#}$ en *M*.

Sea $V^{\#}_{M}$ el conjunto de todas las oraciones validas en $T^{\#}$ en *M*. $V^{\#}_{M}$ contiene aquellas oraciones de L^+ que o bien son establemente verdaderas en cada secuencia de revisión o bien oscilan a lo largo de todo el proceso pero únicamente un número finito de pasos después de cada ordinal límite, para luego estabilizarse nuevamente. Puesto que toda oración establemente verdadera es también cercanamente establemente verdadera, obtenemos la siguiente relación entre los dos sistemas presentados hasta ahora.

TEOREMA 3.14 (Relaciones entre T^* y $T^{\#}$) $V^*_{M} \subseteq V^{\#}_{M}$ para todo modelo base *M*.

Prueba: Si $A \in V^*_{M}$, por la definición 3.9, A es establemente verdadera en toda secuencia de revisión [*M*,*S*]. Y por la definición 3.8, en cada una de estas secuencias existe un α tal que, para todo $\beta \geq \alpha$, $(M,S_{\beta}) \models A$. Luego, para todo $\beta \geq \alpha$ y para todo natural $n \geq 0$, $(M,S_{\beta+0}) \models A$, con lo cual para todo $\beta \geq \alpha$ existe un número natural m tal que, para todo natural $n \geq m$, $(M,S_{\beta+m}) \models A$. Por la definición 3.12, A es cercanamente establemente verdadera en cada [*M, S*]. Y por la definición 3.13, $A \in V^{\#}_{M}$. ■

La l gica de la verdad.indd 146 04/07/2014 13:47:21

Dado un modelo base, $\mathbf{T}^{\#}$ también induce una clasificación de las oraciones de L^{+} en siete categorías. Estas son análogas a las presentadas en la definición 3.10, excepto que, en lugar de hablar de oraciones establemente verdaderas o falsas define las categorías en función de la noción de estabilidad cercana. Como veremos más adelante, esta diferencia se ve reflejada en una categorización diferente de las oraciones de L^{+}.

2.4.3 La teoría $\mathbf{T}^{c}$

Al igual que $\mathbf{T}^{*}$, $\mathbf{T}^{c}$ opta por un concepto de validez basado en la noción de estabilidad; pero, a diferencia de $\mathbf{T}^{*}$, no considera todas las secuencias de revisión al evaluar la estabilidad de una oración, sino sólo aquellas que son *máximamente consistentes*. Como veremos más adelante, si bien no validará tantos principios deseables como $\mathbf{T}^{\#}$, $\mathbf{T}^{c}$ valida unos cuantos principios más para $\mathbf{Tr}$ que $\mathbf{T}^{*}$.

DEFINICIÓN 3.15 (Máxima consistencia) Una secuencia de revisión $[M,S]$ es *máximamente consistente* si y sólo si, para todo α, S_{α} es máximamente consistente.[61]

Una secuencia de revisión es máximamente consistente cuando la extensión que en cada paso asigna al predicado veritativo lo es. En estados sucesores $\alpha + 1$ esta condición es satisfecha automáticamente, pues $\mathbf{S}_{\alpha+1}$ contiene a todas las oraciones verdaderas en el modelo (M,S_{α}) generado por la extensión asignada a Tr en el paso anterior. Sin embargo, la condición puede fallar en estados iniciales y estados límites, en los cuales es posible tanto que una oración y su negación pertenezcan a la extensión del predicado de verdad como que ninguna lo haga. Por ejemplo, existen secuencias de revisión cuyo estado inicial es el conjunto vacío. Asimismo, en un estado límite es posible incluir en la extensión de Tr una oración inestable y su negación. El sistema $\mathbf{T}^{c}$ deja de lado estas posibles secuencias de revisión en las cuales las extensiones asignadas a Tr en ciertos estados no son máximamente consistentes. Al lidiar con oraciones del mentiroso como $\mathbf{M}$ en (2.6), en los estados límites caben sólo dos posibilidades: o bien incluimos

61. Como es usual, dado un lenguaje llamamos ´máximamente consistentes´ a aquellos conjuntos consistentes de oraciones de este lenguaje tales que, si se les incorpora una nueva oración, se tornan inconsistentes.

La l gica de la verdad.indd 147 04/07/2014 13:47:21

M y excluimos ¬M de la extensión de Tr o bien, a la inversa, excluimos M e incluimos su negación.

DEFINICIÓN 3.16 (Validez en T^c) Si A es una oración de L^+ y M un modelo base:

A es *válida en* T^c *en* M ($M \models^c A$) si y sólo si A es establemente verdadera en toda secuencia de revisión máximamente consistente basada en M;
A es *válida en* T^c ($\models^c A$) si y sólo si, para todo M, A es válida en T^c en M.

Sea V^c_M el conjunto de todas las oraciones válidas en T^c en M. Sólo pertenecen a V^c_M aquellas oraciones establemente verdaderas en toda secuencia de revisión máximamente consistente. Puesto que las secuencias consideradas por esta teoría son un subconjunto de aquellas consideradas por T*, obtenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 3.17 (Relaciones entre T* y T^c) $V^*_M \subseteq V^c_M$ para todo modelo base M.

Prueba: A cargo del lector, en los ejercicios para esta subsección.

Al igual que las otras teorías, dado un modelo base T^c da lugar a una clasificación de las oraciones de L^+ en siete categorías semánticas análogas a las presentadas en la definición 3.10. Como es de esperar, la diferencia está dada por el conjunto de secuencias en las cuales se evalúa el comportamiento de cada oración: no son todas, sino sólo las máximamente consistentes.

Ejercicios para la subsección 2.4

1. Confeccione un gráfico o una tabla en la cual quede claro que la oración H′∨ (H ∧ M) es tfp-caprichosa en T* en N.
2. Ofrezca una prueba del teorema 3.17.
3. Por el lema de diagonalización, recurriendo a la función f del ejemplo

La l gica de la verdad.indd 148 04/07/2014 13:47:21

3.2, podemos formular la oración de McGee,[62] equivalente a una fórmula que dice que alguna iteración de Tr sobre la oración de McGee no es verdadera en todo $S \subseteq |N|$:

(2.10) $(N,S) \vDash \mathrm{E} \equiv \neg\forall x \mathrm{Tr}([f]('E',x))$

(a) Indique el progreso de E a lo largo de las secuencias de la forma $[N,\emptyset,B]$, para cualquier B. Indique también qué sucede especialmente en aquel subconjunto de secuencias máximamente consistentes.
(b) ¿$\mathrm{E} \in \mathrm{V}^*_N$? ¿$\mathrm{E} \in \mathrm{V}^\#_N$? ¿$\mathrm{E} \in \mathrm{V}^c_N$?

2.5 Algunos resultados sobre los tres sistemas

Mencionamos a continuación algunos resultados relevantes sobre los tres sistemas presentados.

TEOREMA 3.18 (Consecuencia lógica clásica) Si A es una oración de L^+ y M es un modelo base y $M \vDash \mathrm{A}$, entonces $\mathrm{A} \in \mathrm{V}^*_M$, $\mathrm{A} \in \mathrm{V}^\#_M$ y $\mathrm{A} \in \mathrm{V}^c_M$.

Prueba: Si $M \vDash \mathrm{A}$ entonces $(M,S) \vDash \mathrm{A}$ para todo $S \vDash |M|$. Luego, para toda secuencia de revisión $[M,S]$ existe un α (i.e. 0) tal que, para todo $\beta \geq \alpha$, $(M,S_\beta) \vDash \mathrm{A}$. Por la definición 3.8, A es establemente verdadera en toda secuencia. Y, por la definición 3.9, $\mathrm{A} \in \mathrm{V}^*_M$. Finalmente, por los teoremas 3.14 y 3.17, $\mathrm{A} \in \mathrm{V}^\#_M$ y $\mathrm{A} \in \mathrm{V}^c_M$.

De acuerdo con este resultado, los tres sistemas desarrollados por Gupta y Belnap preservan la lógica clásica, i.e. están cerrados bajo la noción de consecuencia lógica, como se quería originalmente. En lo que resta del capítulo haremos uso de este resultado sin mencionarlo explícitamente por cuestiones de legibilidad, ya que su uso será más que frecuente.

62. Originalmente esta oración fue construida por Vann McGee (1985) en el marco de la obtención de un resultado para teorías de la verdad, del cual el teorema 3.27 es un caso particular.

La l gica de la verdad.indd 149 04/07/2014 13:47:21

TEOREMA 3.19 (Esquema-T de Tarski I) Si A es una oración de L^+ y t es un término del lenguaje que denota el código de A en M:

$A \in V^*_M$ si y sólo si $Tr(t) \in V^*_M$;
$A \in V^\#_M$ si y sólo si $Tr(t) \in V^\#_M$;
$A \in V^c_M$ si y sólo si $Tr(t) \in V^c_M$.

Prueba: Si $A \in V^*_M$, por la definición 3.9, A es establemente verdadera en toda secuencia de revisión. Sea $[M,S]$ una secuencia de revisión cualquiera. Por la definición 3.8, existe un α tal que, para todo $\beta \geq \alpha$, $(M,S_\beta) \vDash A$. Por la definición 3.5, existe un α tal que, para todo $\beta \geq \alpha$, $(M,S_{\beta+1}) \vDash Tr(\text{`A'})$. Por tanto, el código de A pertenece a S_γ para todo $\gamma \geq \beta + 1$. Luego, si t denota el código de A, existe un α (i.e. $\beta+1$) tal que para todo $\gamma \geq \alpha$, $(M,S_\gamma) \vDash Tr(t)$. Por la definición 3.8, $Tr(t)$ es establemente verdadera en $[M,S]$. Puesto que $[M,S]$ era una secuencia arbitraria, por la definición 3.9 sabemos que $Tr(t) \in V^*_M$. La prueba de la conversa y de los casos para las otras teorías son semejantes y quedarán a cargo del lector en los ejercicios para esta subsección. ■

TEOREMA 3.20 (Esquema-T de Tarski II) Si A es una oración de L^+ y t es un término del lenguaje que denota el código de A en M:

$\neg A \in V^*_M$ si y sólo si $\neg Tr(t) \in V^*_M$;
$\neg A \in V^\#_M$ si y sólo si $\neg Tr(t) \in V^\#_M$;
$\neg A \in V^c_M$ si y sólo si $\neg Tr(t) \in V^c_M$.

Prueba: Si $\neg A \in V^\#_M$, por la definición 3.13, $\neg A$ es cercanamente establemente verdadera en toda secuencia de revisión. Sea $[M,S]$ una secuencia de revisión cualquiera. Por la definición 3.12, existe allí un α tal que, para todo $\beta \geq \alpha$, existe un número natural m tal que, para todo $n \geq m$, $(M,S_{\beta+n}) \vDash \neg A$, esto es, $(M,S_{\beta+n}) \nvDash A$. Por la definición 3.5, para todo $n \geq m$, $(M,S_{\beta+n+1}) \nvDash Tr(\text{`A'})$ y, por tanto, $(M,S_{\beta+n+1}) \nvDash Tr(t)$ si $(M,S_{\beta+1}) \vDash t = \text{`A'}$. Con lo cual, en $[M,S]$ existe un α tal que, para todo $\beta \geq \alpha$, existe un número natural m′ (i.e. $m+1$) tal que, para todo $n \geq m'$, $(M,S_{\beta+n}) \vDash \neg Tr(t)$. Por la definición 3.12, $\neg Tr(t)$ es cercanamente establemente verdadera y, por la definición 3.13, $\neg Tr(t) \in V^\#_M$. La prueba de la conversa y de

La l gica de la verdad.indd 150 04/07/2014 13:47:21

los casos para las otras teorías son semejantes y quedarán a cargo del lector en los ejercicios para esta subsección. ■

Un caso particular de estos dos últimos resultados es aquel en el cual t es el numeral del código de A. De acuerdo con el teorema 3.19, A es una oración categóricamente verdadera en cada sistema siempre y cuando Tr('A') también lo sea. Y, de acuerdo con el teorema 3.20, A es una oración categóricamente falsa en cada sistema siempre y cuando Tr('A') también lo sea. En consecuencia, si A es una oración categórica, en cada una de las tres teorías tenemos que $A \equiv Tr('A')$ es categóricamente verdadera. La teoría revisionista de la verdad mantiene la validez del esquema-T de Tarski en su versión extensional para todas las oraciones no patológicas.

TEOREMA 3.21 (Consistencia) V^*_M, $V^\#_M$, V^c_M son conjuntos consistentes.

Prueba: Supongamos que $V^\#_M$ es inconsistente para algún modelo base *M*. Luego, existe una fórmula A tal que $A \in V^\#_M$ y $\neg A \in V^\#_M$. Por la definición 3.13, A y ¬A son cercanamente establemente verdaderas en toda secuencia basada en *M*. Sea [*M*,*S*] una secuencia arbitraria tal. Por la definición 3.12, existe un α tal que para todo $\beta \geq \alpha$ existe un natural m tal que, para todo $n \geq m$, $(M,S_{\beta+n}) \models A$, y existe un α' tal que para todo $\beta' \geq \alpha'$ existe un natural m′ tal que, para todo n′ ≥ m′, $(M,S_{\beta'+n'}) \models \neg A$. Sea *max*(x,y) el mayor de los ordinales x e y. Luego, para todo $\beta \geq max(\alpha,\alpha')$ existe un natural *max*(m,m′) tal que, para todo $n \geq max(m,m')$, $(M,S_{\beta+n}) \models A \wedge \neg A$, lo cual es un absurdo. Por el teorema 3.14, V^*_M también es consistente. La prueba para V^c_M es análoga a la de $V^\#_M$ y quedará a cargo del lector en los ejercicios para esta subsección. ■

Ejercicios para la subsección 2.5

1. Si $M \models A$, pruebe que:
   (a) $A \in V^*_M$ sólo si $Tr(t) \in V^*_M$;
   (b) $A \in V^\#_M$ si y sólo si $Tr(t) \in V^\#_M$;
   (c) $A \in V^c_M$ si y sólo si $Tr(t) \in V^c_M$.

La l gica de la verdad.indd 151 04/07/2014 13:47:21

2. Si $M \vDash A$, pruebe que:
   (a) $\neg A \in V^*_M$ si y sólo si $\neg Tr(t) \in V^*_M$;
   (b) $\neg A \in V^{\#}_M$ sólo si $\neg Tr(t) \in V^{\#}_M$;
   (c) $\neg A \in V^c_M$ si y sólo si $\neg Tr(t) \in V^c_M$.

3. Pruebe que V^c_M es un conjunto consistente.

2.6 Verdad en la aritmética

En lo que resta de esta sección trabajaremos exclusivamente con N como modelo base para el proceso de revisión de hipótesis. Buscamos entonces el conjunto de oraciones correctamente asertables de L^+ bajo la interpretación pretendida de los símbolos no lógicos y en la cual Tr se comporte como un predicado veritativo para L^+, i.e. respete la definición dada en (2.5). Esto nos permitirá comparar las bondades de la teoría revisionista de la verdad con las de otras teorías semánticas como la teoría de punto fijo de Kripke, la teoría paracompleta de Field y la teoría de la verdad transparente de Beall, usualmente desarrolladas sobre N. Todas ellas serán discutidas en este libro.

En la subsección 2.2 hemos indicado que L contiene símbolos de función para expresar ciertas funciones recursivas que nos serán útiles:

$[\neg]x$ expresa la función monádica que aplicada al código x de una fórmula A da el código de $\neg A$.
$x[\wedge]y$ y $x[\vee]y$ expresan funciones diádicas análogas para la conjunción y la disyunción, respectivamente.
$[\forall]vx$ y $[\exists]vx$ expresan las funciones diádicas que asignan al código x de una fórmula A y al código v de una variable de individuo z el código de $\forall zA$ y $\exists zA$, respectivamente.
$x(y/v)$ expresa la función triádica que asigna a los códigos x de una fórmula A, y de un termino t y v de una variable z el código de la fórmula que resulta de sustituir en A todas las apariciones libres de z por t.
$[x]$ expresa la función monádica que asigna a cada número x el código de su numeral.

La l gica de la verdad.indd 152 04/07/2014 13:47:22

Puesto que el conjunto de códigos de oraciones de L^+ es recursivo, existe una fórmula $Sent_{L+}(x)$ que lo expresa. Del mismo modo, $\mathsf{At}(x)$ expresa el conjunto de códigos de oraciones atómicas de L, $\mathsf{Ver}(x)$ el de códigos de oraciones atómicas verdaderas de ese lenguaje, $\mathsf{Fal}(x)$ de las falsas y $\mathsf{var}(x)$ expresa el conjunto códigos de variables de individuo de L^+.

DEFINICIÓN 3.22 (Principios semánticos) Sea A una oración de L^+:

(Tr-step) $\mathrm{Tr}^n(\text{`A'}) \equiv \mathrm{Tr}^m(\text{`A'})$, para todo m y todo $n \in \mathbb{N}$
(Tr¬) $\forall x(Sent_{L+}(x) \supset (\mathrm{Tr}([\neg]x) \equiv \neg \mathrm{Tr}(x)))$
(Tr∧) $\forall x \forall y((Sent_{L+}(x) \wedge Sent_{L+}(y)) \supset (\mathrm{Tr}(x[\wedge]y) \equiv (\mathrm{Tr}(x) \wedge \mathrm{Tr}(y))))$
(Tr∨) $\forall x \forall y((Sent_{L+}(x) \wedge Sent_{L+}(y)) \supset (\mathrm{Tr}(x[\vee]y) \equiv (\mathrm{Tr}(x) \vee \mathrm{Tr}(y))))$
(Tr∀) $\forall x \forall v((var(v) \wedge Sent_{L+}(x([0]/v))) \supset (\mathrm{Tr}([\forall]vx) \equiv \forall y \mathrm{Tr}(x([y]/v))))$
(Tr∃) $\forall x \forall v((var(v) \wedge Sent_{L+}(x([0]/v))) \supset (\mathrm{Tr}([\exists]vx) \equiv \exists y \mathrm{Tr}(x([y]/v))))$
(LEM) $\forall x(Sent_{L+}(x) \supset (\mathrm{Tr}(x) \vee \mathrm{Tr}([\neg]x)))$
(LNC) $\forall x(Sent_{L+}(x) \supset \neg(\mathrm{Tr}(x) \wedge \mathrm{Tr}([\neg]x)))$

(Tr-step) es un esquema. En el caso en que $m = 1$ y $n = 0$ obtenemos el esquema-T de Tarski en su versión extensional para cada oración A de L^+. Los principios (Tr¬), (Tr∧) y (Tr∨) expresan la conmutatividad del predicado veritativo con respecto a las conectivas lógicas correspondientes y contribuyen a expresar el carácter composicional de la verdad. Los principios (Tr∀) y (Tr∃) culminan la tarea, expresando que una oración universalmente cuantificada es verdadera siempre y cuando todas sus instancias numéricas lo sean, y que una oración existencialmente cuantificada es verdadera siempre y cuando alguna de sus instancias numéricas lo sea. Eso es correctamente afirmable gracias al hecho de que todos los elementos de $|N|$ tienen un numeral en L^+.[63] Los principios (LEM)[64] o ley de tercero excluido y (LNC)[65] o ley de no contradicción expresan

63. Si el modelo base contara con una cantidad no enumerable de objetos en su dominio, dado que L^+ es un lenguaje contable, (Tr∀) y (Tr∃) resultarían falsos. Para expresar el carácter composicional de la verdad precisaríamos recurrir en ese caso a un predicado de satisfacción. Para una explicación más detallada del problema, véase Volker Halbach (2011), p. 192.
64. Sus siglas en inglés están por '*Law of Excluded Middle*'.
65. Sus siglas en inglés están por '*Law of Non-Contradiction*'.

La l gica de la verdad.indd 153 04/07/2014 13:47:22

que Tr es un predicado veritativo para un lenguaje clásico, lo cual es deseable pues L^+ lo es.

TEOREMA 3.23 (Tr-step) Para todo m y todo $n \in \mathbb{N}$, si $m \neq n$, existe una oración D de L^+ que genera una instancia inválida de (Tr-step) en T^*_N, $T^\#_N$ y T^c_N.

Prueba: Supongamos sin pérdida de generalidad que n>m. Por el lema de diagonalización, utilizando la función f del ejemplo 3.2 podemos formular una oración D equivalente a otra que dice que el resultado de iterar n−(m+1) veces el predicado veritativo a D no es verdadera para todo $S \subseteq |N|$:

(2.11) $\quad (N,S) \vDash D \equiv \neg Tr(\text{`}Tr^{n-(m+1)}(\text{`}D\text{'})\text{'})$

Luego, en toda secuencia de revisión [*N*,*S*], para todo ordinal α, $(N,S_\alpha) \vDash D$ si y sólo si $(N,S_\alpha) \vDash \neg Tr^{n-m}(\text{`}D\text{'})$. Por la definición 3.5, $(N,S_{\alpha+m}) \vDash Tr^m(\text{`}D\text{'})$ si y sólo si $(N,S_{\alpha+m}) \vDash \neg Tr^n(\text{`}D\text{'})$, con lo cual $(N,S_{\alpha+m}) \nvDash Tr^m(\text{`}D\text{'}) \equiv Tr^n(\text{`}D\text{'})$. Y por las definiciones 3.8 y 3.12, $Tr^n(\text{`}D\text{'}) \equiv Tr^m(\text{`}D\text{'})$ no es establemente ni cercanamente establemente verdadera en ninguna secuencia de revisión. Por las definiciones 3.9, 3.13 y 3.16, $Tr^n(\text{`}D\text{'}) \equiv Tr^m(\text{`}D\text{'})$ no es válida en T^*_N, $T^\#_N$ ni en T^c_N.

A la luz de los teoremas 3.19, 3.20 y 3.23, concluimos que $Tr^n(\text{`}A\text{'})$ y $Tr^m(\text{`}A\text{'})$ son intercambiables únicamente en contextos categóricos, esto es, en casos en los cuales A es una oración categóricamente verdadera o categóricamente falsa. El esquema-T de Tarski en su versión extensional puede fallar en instancias patológicas.

TEOREMA 3.24 (Principios semánticos I)

1. (Tr¬), (Tr∧) y (Tr∀) pertenecen a $V^\#_N$.
2. (Tr¬) y (Tr∧) pertenecen a V^c_N, pero no (Tr∀).
3. (Tr¬), (Tr∧) y (Tr∀) no pertenecen a V^*_N.

Prueba: Sea [*N*,*S*] una secuencia de revisión cualquiera:

1. Sea A una oración cualquiera de L^+. Para todo β, $(N,S_\beta) \vDash A$ si y sólo si $(N,S_\beta) \nvDash \neg A$. Por la definición 3.5, para todo β, $(N,S_{\beta+1}) \vDash Tr(\text{`}A\text{'})$ si y sólo si $(N,S_{\beta+1}) \vDash \neg Tr(\text{`}\neg A\text{'})$. Luego, existe un α (i.e. 0) tal que para todo $\beta \geq \alpha$

La l gica de la verdad.indd 154 04/07/2014 13:47:22

existe un natural $\mathbf{m}$ (i.e. 1) tal que, para todo $\mathbf{n} \geq \mathbf{m}$, $(N,S_{\beta+n}) \vDash \mathrm{Tr}(\text{`}\neg A\text{'}) \equiv \neg \mathrm{Tr}(\text{`}A\text{'})$. Como $\mathbf{A}$ era una oración arbitraria, por las definiciones 3.12 y 3.22, $(\mathrm{Tr}\neg)$ es cercanamente establemente verdadera y, por la definición 3.13, pertenece a $\mathbf{V}^{\#}_{N}$.

Dejaremos a cargo del lector en los ejercicios para esta sección la prueba de que $(\mathrm{Tr}\wedge) \in \mathbf{V}^{\#}_{N}$.

Sea $\mathbf{A}$ una fórmula arbitraria de L^{+} con $\mathbf{a}$ lo sumo $\mathbf{z}$ como su única variable libre. Para todo β, $(N,S_{\beta}) \vDash \forall z A$ si y sólo si $(N,S_{\beta}) \vDash A([n])$ para todo $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$. Por la definición 3.5, para todo β, $(N,S_{\beta+1}) \vDash \mathrm{Tr}(\text{`}\forall z A\text{'})$ si y sólo si $(N,S_{\beta+1}) \vDash \mathrm{Tr}(\text{`}A([n])\text{'})$ para todo $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$ o, lo que es lo mismo, $(N,S_{\beta+1}) \vDash \forall y\text{-}\mathrm{Tr}(\text{`}A\text{'}([y]/\text{`}z\text{'}))$. Luego, existe un α (i.e. 0) tal que para todo $\beta \geq \alpha$ existe un natural m (i.e.1) tal que, para todo $\mathbf{n} \geq \mathbf{m}$, $(N,S_{\beta+n}) \vDash \mathrm{Tr}(\text{`}\forall z A\text{'}) \equiv \forall y \mathrm{Tr}(\text{`}A\text{'}([y]/\text{`}z\text{'}))$. Como $\mathbf{A}$ y $\mathbf{z}$ eran arbitrarias, por las definiciones 3.12 y 3.22, $(\mathrm{Tr}\forall)$ es cercanamente establemente verdadera y, por la definición 3.13, pertenece a $\mathbf{V}^{\#}_{N}$.

2. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ oraciones cualesquiera de L^{+}. Si $[N,S]$ es una secuencia máximamente consistente, por la definición 3.15, para todo β, $(N,S_{\beta}) \vDash \mathrm{Tr}(\text{`}A\text{'})$ si y sólo si $(N,S_{\beta}) \vDash \neg \mathrm{Tr}(\text{`}\neg A\text{'})$ y $(N,S_{\beta}) \vDash \mathrm{Tr}(\text{`}A \wedge B\text{'})$ si y sólo si $(N,S_{\beta}) \vDash \mathrm{Tr}(\text{`}A\text{'}) \wedge \mathrm{Tr}(\text{`}B\text{'})$. Como $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ eran arbitrarias, por las definiciones 3.8 y 3.22, $(\mathrm{Tr}\neg)$ y $(\mathrm{Tr}\wedge)$ son establemente verdaderas y, por la definición 3.16, pertenecen a $\mathbf{V}^{c}_{N}$.

Como hemos mencionado, el lema de diagonalización nos permite formular la oración $\mathbf{E}$ de McGee mediante la equivalencia obtenida en (2.10) en todo $S \subseteq |N|$. Supongamos que $(\mathrm{Tr}\forall) \in \mathbf{V}^{c}_{N}$. Luego, la instancia de $(\mathrm{Tr}\forall)$ generada por $\mathrm{Tr}([f](\text{`}E\text{'},x))$ también pertenece a $\mathbf{V}^{c}_{N}$. Por las definiciones 3.8 y 3.16, en cada $[N,S]$ máximamente consistente existe un α tal que para todo $\beta \geq \alpha$:

(*) $$(N,S_{\beta}) \vDash \forall x \mathrm{Tr}(\text{`}\mathrm{Tr}([f](\text{`}E\text{'},x))\text{'}) \equiv \mathrm{Tr}(\text{`}\forall x \mathrm{Tr}([f](\text{`}E\text{'},x))\text{'})$$

$(N,S_{\alpha}) \vDash E$ o $(N,S_{\alpha}) \nvDash E$. En el primer caso, por la definición 3.5, para cada $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Tr}([f](\text{`}E\text{'},[n])) \in S_{\alpha+m}$ para todo natural $\mathbf{m} > \mathbf{n}$. En el segundo caso, por (2.10) y la definición 3.5, $(N,S_{\alpha+1}) \vDash \neg \mathrm{Tr}(\text{`}E\text{'})$, con lo cual $(N,S_{\alpha+1}) \vDash \neg \forall x \mathrm{Tr}([f](\text{`}E\text{'},x))$ y, por (2.10), $(N,S_{\alpha+1}) \vDash E$. Por la definición 3.5, nuevamente tenemos que, para cada $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Tr}([f](\text{`}E\text{'},[n])) \in S_{\alpha+m}$ para todo natural $\mathbf{m} > \mathbf{n} + 1$. En cualquier caso, por la definición 3.5:

La l gica de la verdad.indd 155 04/07/2014 13:47:22

(**) $(N,S_{\alpha+\omega})\models \forall x\mathrm{Tr}([f]('E',x))$

Y, por tanto, $(N,S_{\alpha+\omega})\models\forall x\mathrm{Tr}([f]('E',x+1))$ o, lo que es lo mismo:

(***) $(N,S_{\alpha+\omega})\models\forall x\mathrm{Tr}('\mathrm{Tr}([f]('E',x))')$

De (*) y (***), $(N,S_{\alpha+\omega})\models\mathrm{Tr}('\forall x\mathrm{Tr}([f]('E',x))')$, con lo cual, $\forall x\mathrm{Tr}([f]('E',x)) \in S_{\alpha+\omega}$. Por la definición 3.15, $S_{\alpha+\omega}$ es máximamente consistente y, por (2.10), $E \notin S_{\alpha+\omega}$. Pero al mismo tiempo, por (**) tenemos que $(N,S_{\alpha+\omega})\models\mathrm{Tr}([f]('E',0))$, esto es, $E \in S_{\alpha+\omega}$, lo cual es un absurdo.

3. Dejaremos la prueba de que $(\mathrm{Tr}\forall)\notin V^*_N$ a cargo del lector en los ejercicios para esta subsección.
   Puesto que M en (2.6) es inestable a lo largo de toda secuencia de revisión basada en N, por la definición 3.5 existe una secuencia $[N,S,B]$ tal que $\{M,\neg M\}\subseteq B(\lambda)$ para todo ordinal límite λ, esto es, $(N,S_\lambda)\models\mathrm{Tr}('M')\wedge\mathrm{Tr}('\neg M')$ o, lo que es lo mismo, $(N,S_\lambda) \not\models \neg\mathrm{Tr}('M') \equiv \mathrm{Tr}('\neg M')$ para todo ordinal límite λ. Por lo tanto, no existe un ordinal α tal que para todo $\beta \geq \alpha$ $(N,S_\beta)\models\neg\mathrm{Tr}('M') \equiv \mathrm{Tr}('\neg M')$ y, por las definiciones 3.8 y 3.22, $(\mathrm{Tr}\neg)$ no es establemente verdadera en $[N,S,B]$. Por la definición 3.9, $(\mathrm{Tr}\neg) \notin V^*_N$. La prueba para $(\mathrm{Tr}\wedge)$ es similar y quedará en manos del lector en los ejercicios al finalizar esta subsección. ■

COROLARIO 3.25 (Principios semánticos II)

1. $(\mathrm{Tr}\vee)$, $(\mathrm{Tr}\exists)$, (LEM) y (LNC) pertenecen a $V^{\#}_N$.
2. $(\mathrm{Tr}\vee)$, (LEM) y (LNC) pertenecen a V^{c}_N, pero no $(\mathrm{Tr}\exists)$.
3. $(\mathrm{Tr}\vee)$, $(\mathrm{Tr}\exists)$, (LEM) y (LNC) no pertenecen a V^*_N.

Prueba: La prueba es inmediata en virtud de la interdefinibilidad de los operadores lógicos. Quedarán a cargo del lector. ■

El teorema 3.24 y el corolario 3.25 muestran que $T^{\#}_N$ valida todos los principios composicionales para Tr, i.e. $(\mathrm{Tr}\neg)$, $(\mathrm{Tr}\wedge)$, $(\mathrm{Tr}\vee)$, $(\mathrm{Tr}\forall)$ y $(\mathrm{Tr}\exists)$ y, *a fortiori*, los principios semánticos de Tercero Excluido y No Contradicción, T^{c}_N sólo valida los tres primeros y los dos últimos y T^*_N no valida ninguno. Puesto que los principios en cuestión son *prima facie* deseables e intuitivos, $T^{\#}_N$ pareciera ubicarse por

La l gica de la verdad.indd 156 04/07/2014 13:47:22

encima de sus rivales en cuanto teoría semántica de la verdad para la aritmética. Sin embargo, un teorema de McGee (1985) prueba que cualquier sistema que valide los principios mencionados y contenga Tr('A') siempre que contenga A es ω-inconsistente. $T^{\#}_{N}$ verifica todas las hipótesis de este teorema de McGee.

DEFINICIÓN 3.26 (ω-inconsistencia) Un conjunto Γ de fórmulas de L^{+} cerrado bajo consecuencia lógica es ω-inconsistente si y sólo si existe una fórmula A de L^{+} con una única variable libre x tal que A[[n]/x] ∈ Γ para todo n ∈ ℕ y, a la vez, ¬∀xA ∈ Γ.

TEOREMA 3.27 (ω-inconsistencia) $V^{\#}_{N}$ es ω-inconsistente.

Prueba: Sea E como en (2.10). Puesto que E ≡ ¬∀xTr([f]('E',x)) ∈ $V^{\#}_{N}$, ¬E⊃Tr('E') ∈ $V^{\#}_{N}$ (*). Por (2.10) y el punto 3 del teorema 3.24, Tr('E')⊃¬∀xTr([f]('E',x+1)) ∈ $V^{\#}_{N}$ y, por ende, Tr('E')⊃¬∀xTr([f]('E',x)) ∈ $V^{\#}_{N}$, con lo cual Tr('E')⊃E ∈ $V^{\#}_{N}$ (**). De (*) y (**), ¬E⊃E ∈ $V^{\#}_{N}$ y, por tanto, E ∈ $V^{\#}_{N}$. Por (2.10) nuevamente, ¬∀xTr([f]('E',x)) ∈ $V^{\#}_{N}$, pero al mismo tiempo, Tr([f]('E',[n]) ∈ $V^{\#}_{N}$ para cada n ∈ ℕ, por el teorema 3.19. Finalmente, por la definición 3.26, $V^{\#}_{N}$ es ω-inconsistente.

Teniendo en mente que el objetivo de esta sección es dar con el conjunto de oraciones correctamente asertables de L^{+} bajo la interpretación estándar de los símbolos no lógicos de L, y en la cual Tr se comporte como un predicado de verdad para todo L^{+}, el teorema 3.27 indica que $V^{\#}_{N}$ no es el conjunto que buscamos. Pues bajo la interpretación estándar del lenguaje de la aritmética de primer orden, los únicos objetos que pertenecen al dominio son los números naturales estándar, tal como los conocemos. Sin embargo, cada una de las instancias de Tr([f]('E',[n])) dadas por n ∈ ℕ pertenecen a $V^{\#}_{N}$ y, al mismo tiempo, también pertenece a este conjunto ∃x¬Tr([f]('E',x)). Luego, de acuerdo con $T^{\#}_{N}$, existe al menos un número natural no estándar y, por lo tanto, no es un conjunto de oraciones correctamente asertables de L^{+} bajo la interpretación pretendida.[66]

66. Para una discusión acerca de este punto véase Halbach y Leon Horsten (2005), Hannes Leitgeb (2007), Barrio (2010) y Barrio y Picollo (2013).

La l gica de la verdad.indd 157 04/07/2014 13:47:22

En consecuencia, si bien $T^{\#}_{N}$ prueba ser una mejor teoría semántica por permitir una buena cantidad de principios intuitivos y deseables para Tr que sus rivales no validan, paga el precio de no cumplir nuestro objetivo principal. Gupta y Belnap (1993) no se pronuncian por ninguna de la tres teorías que presentan y desarrollan.

Ejercicios para la subsección 2.6

1. Pruebe que $(\mathrm{Tr}\wedge) \in V^{\#}_{N}$.
2. Pruebe que $(\mathrm{Tr}\forall) \notin V^{*}_{N}$.
3. Pruebe que $(\mathrm{Tr}\wedge) \notin V^{*}_{N}$.
4. Pruebe que:
5. (a) $(\mathrm{Tr}\vee)$, $(\mathrm{Tr}\exists)$, (LEM) y (LNC) pertenecen a $V^{\#}_{N}$.
   (b) $(\mathrm{Tr}\vee)$, (LEM) y (LNC) pertenecen a V^{c}_{N}, pero no $(\mathrm{Tr}\exists)$.
   (c) $(\mathrm{Tr}\vee)$, $(\mathrm{Tr}\exists)$, (LEM) y (LNC) no pertenecen a V^{*}_{N}.

3 Problemas y soluciones alternativas

3.1 Políticas de bootstrapping

Como hemos mencionado ya, las primeras versiones de la teoría revisionista de la verdad fueron dadas independientemente por Herzberger (1982a; 1982b) y Gupta (1982). Estos primeros intentos no fueron exactamente idénticos entre sí. Parte de la diferencia entre ambos yace en la elección de diferentes políticas de bootstrapping, esto es, del modo en que las oraciones inestables son clasificadas dentro o fuera de la extensión del predicado veritativo en los estados límites de una secuencia de revisión.[67]

En cada secuencia de revisión hay dos tipos de estados: los sucesores y los no sucesores. Para los primeros el modo de proceder es claro y razonable: aplicamos el esquema-T de Tarski. Para los estados no sucesores, también hay reglas razona-

67. Véase la definición 3.5.

La l gica de la verdad.indd 158 04/07/2014 13:47:23

bles a seguir, que nos indican qué hacer con las oraciones que se han estabilizado dentro o fuera de la extensión del predicado de verdad. Sin embargo, estas reglas no son suficientes, pues nada dicen sobre las oraciones inestables. Deben ser por tanto suplementadas con una política de bootstrapping. Si bien puede parecer que su elección es completamente arbitraria y poco importante, veremos en esta subsección que diferentes políticas de bootstrapping darán lugar a diferentes clasificaciones de las oraciones de L^+ en las siete categorías semánticas que hemos presentado en la definición 3.10.

3.1.1 El sistema de Herzberger

Herzberger ha elegido quizá la política más simple, que notaremos B_H.

DEFINICIÓN 3.28 (B_H) Sea $[M,S,B_H]$ una secuencia de revisión. $B_H(\lambda)=\emptyset$ para todo ordinal límite λ.

De acuerdo con Herzberger, las oraciones inestables previamente a cada ordinal límite λ deberán quedar fuera de la extensión del predicado veritativo en la etapa λ del proceso de revisión. Reemplazando B en la definición 3.5 por B_H, obtenemos un conjunto más pequeño de secuencias de revisión con las cuales clasificar las oraciones de L^+ dentro de las siete categorías semánticas. Las llamaremos 'secuencias de revisión de Herzberger'. En cada estado límite λ de cada secuencia $[M,S]$, $S_\lambda = S^{\mathsf{T}}_\lambda$.

Como veremos en los ejemplos subsiguientes, las secuencias de Herzberger constituyen un conjunto demasiado pequeño, permitiendo clasificar oraciones de L^+ de forma intuitivamente incorrecta. El primero tendrá que ver con la interacción de distintas oraciones del mentiroso lógicamente independientes entre sí.

EJEMPLO 3.29 (Bicondicionales de mentirosos)[68] Sea M como en (2.6). Puesto que la clase de puntos fijos en N de $\neg\mathrm{Tr}$ no es recursiva, existe una nueva oración

68. El primero en notar este error de clasificación como un producto de la elección de políticas de bootstrapping, tanto en el sistema de Herzberger como en el de Gupta, fue Belnap (1982).

La l gica de la verdad.indd 159 04/07/2014 13:47:23

$\mathbf{M}'$ del mentiroso independiente de (o, lo que es lo mismo, no equivalente a) $\mathbf{M}$ tal que para todo $S \subseteq |N|$:

(3.1) $(N,S) \vDash \mathbf{M}' \equiv \neg \mathrm{Tr}(\ulcorner \mathbf{M}' \urcorner)$

Al igual que $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ es inestable en toda secuencia de revisión. Luego, lo es previamente a ω, el primer ordinal límite. Por lo tanto, ni $\mathbf{M}$ ni $\mathbf{M}'$ caerán dentro de la extensión de Tr en la etapa ω de una secuencia de revisión de Herzberger. A partir de allí, ambas oscilarán juntas, ya sea dentro o fuera de la extensión de este predicado, en todas las etapas de la secuencia. Luego, la siguiente oración es establemente verdadera y, por ende, categóricamente verdadera de acuerdo con el sistema de Herzberger:

(3.2) $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}'$

Aquello constituye un error, en tanto ambas oraciones son independientes.

La segunda clase de errores cometidos por el sistema de Herzberger fue estudiada principalmente por Aladdin Yaqūb (1993) y concierne a aquellos conjuntos de oraciones infundadas que intuitivamente poseen una única asignación aceptable de valores de verdad clásicos. Bautizada posteriormente por André Chapuis (1996) como 'Gupta puzzles', Gupta y Belnap (1993: cap. 6, sec. 6) reconocen ellos mismos primero la existencia de esta clase de problemas dentro de su teoría.

EJEMPLO 3.30 (Gupta puzzles I) Con la ayuda del lema de diagonalización, podemos probar la existencia de dos oraciones J_a y J_b tales que, para todo $S \subseteq |N|$:[69]

(3.3) $(N,S) \vDash \mathrm{J}_a \equiv (\neg \mathrm{Tr}(\ulcorner \mathrm{J}_a \urcorner) \vee \neg \mathrm{Tr}(\ulcorner \mathrm{J}_b \urcorner))$

(3.4) $(N,S) \vDash \mathrm{J}_b \equiv (\neg \mathrm{Tr}(\ulcorner \mathrm{J}_a \urcorner) \wedge \neg \mathrm{Tr}(\ulcorner \mathrm{J}_b \urcorner))$

J_a afirma que ella o J_b es falsa, mientras que J_b afirma que ambas lo son. Supongamos que J_b es verdadera. Luego, por una aplicación de la versión material y

69 Una versión más sofisticada del ejemplo corresponde a Roy Cook (2002). Este artículo se enmarca en una discusión sobre la adecuación material de la teoría de la revisión -precisamente el punto que nos concierne aquí- con Michael Kremer (2002), quien ofreció la versión simplificada del ejemplo original, que presentamos aquí.

La l gica de la verdad.indd 160 04/07/2014 13:47:23

extensional del esquema-T de Tarski, tenemos que $\neg Tr(`J_a') \wedge \neg Tr(`J_b')$ y, con ello, que $\neg Tr(`J_b')$, contradiciendo nuestra hipótesis inicial. Diremos entonces que $J_b$ es falsa, esto es, que $\neg Tr(`J_b')$. Aplicando la regla de introducción de la disyunción, tenemos que $\neg Tr(`J_a') \vee \neg Tr(`J_b')$ y, mediante otra aplicación del esquema T extensional podemos concluir que J_a es verdadera. En consecuencia, la única asignación consistente de valores de verdad clásicos a estas oraciones es la que da verdad a J_a y falsedad a J_b. Sin embargo, la siguiente tabla muestra que existe al menos una secuencia de Herzberger en la cual las oraciones en cuestión no se estabilizan en estos valores:

	0	1	2	3	4	5	...	ω	ω+1	...
J_a	t	f	t	f	t	f	...	t	f	t
J_b	t	f	t	f	t	f	...	t	f	t

Por ende, el sistema no representa fielmente nuestro razonamiento alrededor de la verdad, pues no nos permite afirmar que J_a es categóricamente verdadera y que J_b es categóricamente falsa, como es aparentemente correcto.

Podría argumentarse, como ha sugerido Chapuis (1996: 407-408) y desarrollado Kremer (2002), que los pasos que llevan a concluir que J_a ha de ser verdadera mientras que J_b falsa hacen un uso ilícito de la versión extensional del esquema-T que la teoría misma señala como incorrecta,[70] a la vez que descartan sin aparente razón aquellas asignaciones inestables de valores de verdad a estas oraciones que la teoría considera legítimas. En efecto, una política que busque minimizar las inestabilidades llevaría a errores, como muestra el siguiente ejemplo de Chapuis.

EJEMPLO 3.31 (Gupta puzzles II) Sea H como en (2.8). Gracias al lema de diagonalización, podemos probar la existencia de una oración I tal que, para todo $S \subseteq |N|$:

(3.5) $\quad (N,S) \models I \equiv (Tr(`H') \vee \neg Tr(`I'))$

70. Aunque esto podría ser visto como un argumento circular: a favor de la teoría empleando la teoría misma.

La l gica de la verdad.indd 161 04/07/2014 13:47:23

I afirma que o bien H es verdadera, o bien ella misma es falsa. Mediante un razonamiento sencillo podemos ver que la única asignación estable de valores de verdad a H e I *implica que* H sea verdadera. Luego, si las asignaciones estables fueran preferibles a las inestables, deberíamos concluir que es preferible que la oración del honesto sea verdadera a que sea falsa, lo cual es incorrecto.[71]

Asimismo, Kremer (2002) argumenta a favor de las inestabilidades en grupos de oraciones infundadas como son los Gupta puzzles, a pesar de que intuitivamente existe una asignación de valores de verdad estable para ellas. No obstante, Cook (2003) señala un caso en el que las oraciones involucradas son infundadas y, sin embargo, la teoría de la revisión sí da un veredicto categórico —el único posible—, el cual desarrollamos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.32 (Gupta puzzles III) Una vez más, vía el lema de diagonalización, podemos probar la existencia de dos oraciones K_a y K_b tales que, para todo $S \subseteq |N|$:

(3.6) $(N,S) \vDash K_a \equiv \neg(\mathrm{Tr}(\text{`}K_a\text{'}) \equiv \mathrm{Tr}(\text{`}K_b\text{'}))$

(3.7) $(N,S) \vDash K_b \equiv (\mathrm{Tr}(\text{`}K_a\text{'}) \equiv \mathrm{Tr}(\text{`}K_b\text{'}))$

K_a afirma que su valor de verdad es diferente al de K_b, mientras que K_b afirma que son iguales. Una vez más, un argumento intuitivo nos lleva a concluir que K_a es verdadera y K_b falsa, como podrá comprobar el lector. Y, en efecto, el sistema de Herzberger las clasifica de ese modo.

Debiendo abandonar entonces la explicación según la cual las oraciones resultan patológicas de acuerdo con el sistema de Herzberger por ser infundadas, surge una nueva explicación posible: la diferencia entre las oraciones del ejemplo 3.30 y 3.32 yace en que K_a es una tautología y K_b una contradicción, mientras que J_a y J_b no responden a ninguno de estos esquemas. Puesto que las secuencias de Herzberger constituyen un subconjunto de las secuencias de revisión, el teorema 3.18 ofrece una buena razón para diferenciar entre ambos casos. Sin embargo, existe un tercer conjunto de oraciones claramente infundadas consideradas no patológicas por el sistema de Herzberger y, no obstante, ninguna de ellas es una tautología o una contradicción, como ilustra el siguiente ejemplo.

71. Un modo de ver la incorrección de esta afirmación es considerar la oración I′, equivalente a $(\mathrm{Tr}(\text{`H'}) \wedge \neg \mathrm{Tr}(\text{`I'}))$.

La l gica de la verdad.indd 162 04/07/2014 13:47:23

EJEMPLO 3.33 (Gupta puzzles IV) Al igual que en los casos anteriores, el lema de diagonalización garantiza la existencia de dos oraciones P_a y P_b tales que, para todo $S \subseteq |N|$:

(3.8) $(N,S) \vDash P_a \equiv (Tr('P_a') \vee Tr('P_b'))$

(3.9) $(N,S) \vDash P_b \equiv (\neg Tr('P_a') \wedge \neg Tr('P_b'))$

P_a afirma que ella o P_b ha de ser verdadera, mientras que P_b afirma que ambas son falsas. Tanto un razonamiento intuitivo como el sistema de Herzberger llevan a concluir que P_a es verdadera y P_b falsa. Su comprobación quedará a cargo el lector. Gupta y Belnap (1993) mismos presentan una versión de este ejemplo y sostienen que ninguna de las oraciones es una tautología o una contradicción (véase Gupta y Belnap, 1993: 151).

Resta entonces explicar por qué en algunos casos los conjuntos de oraciones infundadas que dan lugar a los Gupta puzzles llegan a estabilizarse en la única asignación de valores de verdad clásicos posible mientras que en otros casos no. Como hemos visto, no es posible hallar la causa en el carácter lógico de las oraciones involucradas.

Existen otros Gupta puzzles que representan problemas para la teoría de Herzberger y para otras teorías de las cuales hablaremos a continuación. A la luz de ellos y del tratamiento que estas teorías ofrecen a oraciones como (3.2), éstas parecen ser materialmente inadecuadas en cuanto teorías de la verdad.

3.1.2 El sistema de Gupta

Al igual que Herzberger, Gupta (1982) adopta una política constante de bootstrapping, esto es, la misma para cada ordinal límite.

DEFINICIÓN 3.34 (B_G) Sea $[M,S,B_G]$ una secuencia de revisión (generada por la hipótesis inicial S). $B_G(\lambda) = S$ para todo ordinal límite λ.

De acuerdo con la teoría original de Gupta, si una oración resulta inestable previamente a un estado límite λ en una secuencia $[M,S]$, pertenecerá a S_λ siem-

La l gica de la verdad.indd 163 04/07/2014 13:47:23

pre y cuando pertenezca a S, pues reemplazando B en la definición 3.5 por B_G, $S_\lambda=(S^T_\lambda \cup S)-S^\perp_\lambda$. Al igual que las secuencias de Herzberger, las secuencias de Gupta también constituyen un subconjunto propio del conjunto de secuencias de revisión dadas por la definición 3.5. Y como veremos a continuación, las secuencias de Gupta también tienen problemas de clasificación de las oraciones de L^+ de acuerdo con las siete categorías que han sido presentadas en la definición 3.10.

EJEMPLO 3.35 (Bicondicionales de mentirosos) Sean M, M' y (3.2) como en el ejemplo 3.29. Como podrá comprobar el lector, a diferencia del sistema de Herzberger, el sistema de Gupta no clasifica esta última oración dentro de la categoría de oraciones categóricamente verdaderas sino tf-caprichosas, esto es, la trata como una oración del honesto. Dado que M y M' son independientes, Yaqūb (1993) identifica esta clasificación con un error, mientras que Belnap (1982) la considera, cuanto menos, extraña. Este último sugiere que la oración debería resultar inestable en al menos una secuencia. El primero, en cambio, afirma que la falta de relación entre M y M' es tal que (3.2) debería ser inestable en toda secuencia de revisión y catalogada, por tanto, como paradójica.

En cuanto a los Gupta puzzles, el sistema de Gupta se comporta exactamente del mismo modo que el de Herzberger con respecto a los conjuntos de oraciones presentados en los ejemplos 3.30, 3.32 y 3.33. La verificación quedará a cargo del lector.

EJEMPLO 3.36 (Ciclos de honestos) Consideremos la oración H del honesto dada por (2.8). Al igual que la teoría de Gupta y Belnap en el ejemplo 3.7, el sistema de Gupta clasifica correctamente esta oración como tf-caprichosa. Sin embargo, con la ayuda del lema de diagonalización, podemos probar la existencia de dos oraciones H_a y H_b tales que, para todo $S \subseteq |N|$:

(3.10) $\qquad (N,S) \vDash \mathsf{H}_a \equiv \mathsf{Tr}(\text{`}\mathsf{H}_b\text{'})$

(3.11) $\qquad (N,S) \vDash \mathsf{H}_b \equiv \mathsf{Tr}(\text{`}\mathsf{H}_a\text{'})$

que intuitivamente funcionan del mismo modo que H y que, no obstante, no son clasificadas adecuadamente por el sistema de Gupta como tf-caprichosas. Pues

La l gica de la verdad.indd 164 04/07/2014 13:47:23

si partimos de una hipótesis a la cual pertenece H_a pero no H_b, los valores de verdad de estas oraciones serán inestables a lo largo de toda la secuencia, ya que ningún ordinal límite las juntará dentro o fuera de la extensión del predicado de verdad, sino que copiará la elección original.

3.1.3 El sistema de Belnap

Belnap (1982) considera insatisfactorios tanto el sistema de Gupta como el de Herzberger. Desde su punto de vista, habiendo reconocido que es preciso decidir arbitrariamente la suerte de oraciones inestables previamente a cada ordinal límite en las secuencias de revisión, Gupta y Herzberger borran con el codo lo escrito con la mano, esto es, introducen un grado de arbitrariedad al comienzo de las secuencias –pues permiten cualquier hipótesis inicial– pero no dejan libertad alguna en estados límites.

Belnap señala esta restricción como la causa de los errores de clasificación de bicondicionales de mentirosos como los presentados en los ejemplos 3.29 y 3.34, y de otras oraciones compuestas por oraciones del mentiroso independientes entre sí. A raíz de ello, propone lo siguiente:

> Pido que se considere un esquema en todo similar al de Gupta, excepto en que hay un bootstrapper definido aparte para cada ordinal no sucesor. [...] El propósito de mi sugerencia es tornar máximamente arbitrarias aquellas notas de la Regla de Revisión que requieran cualquier tipo de arbitrariedad. Sólo entonces estaremos seguros de que lo que *sobrevive* esta arbitrariedad realmente depende entera y exclusivamente del modelo con el cual comenzamos junto con la Regla de Revisión, los componentes del proceso de revisión (Belnap, 1982: 106-107).

Formalmente, la política de bootstrapping propuesta por Belnap (1982) es la que hemos presentado en la definición 3.5 y que ha sido aceptada también por Gupta en Gupta y Belnap (1993). Si bien este sistema clasifica oraciones como (3.2) como tfp-caprichosas, cumpliendo las expectativas de Belnap aunque no las de Yaqūb, lamentablemente adolece de los mismos problemas de clasificación en cuanto a los Gupta puzzles presentados en los ejemplos 3.30, 3.32 y 3.33 que los sistemas de Gupta y Herzberger, y tampoco clasifica correctamente el ciclo

La l gica de la verdad.indd 165 04/07/2014 13:47:23

de honestos del ejemplo 3.35. No obstante, *The Revision Theory of Truth* se ha convertido en el *locus classicus* con respecto a teorías revisionistas de la verdad.

3.1.4 El sistema de Yaqūb

Como ya hemos mencionado, Yaqūb (1993) no está satisfecho con la clasificación que los tres sistemas presentados hasta aquí hacen de oraciones como (3.2). Adicionalmente, es el primero en señalar las dificultades que tienen los sistemas presentados a la hora de clasificar honestos cíclicos y también insiste sobre los problemas de clasificación a los cuales dan lugar los Gupta puzzles.

De acuerdo con Yaqūb, estos errores de clasificación se producen debido a una arbitrariedad excesiva, tanto en la hipótesis inicial como en los bootstrappers en cada ordinal límite, que la regla de revisión tarskiana no logra corregir en estados sucesores. Pero dado que la arbitrariedad al inicio del proceso no puede advertirse sino a la luz del proceso mismo, Yaqūb concluye que debemos aceptarla. La corrección de aquellos errores deberá venir, por tanto, de la mano de una mayor restricción en la política de bootstrapping para los estados límites. La nueva política deberá lograr deshacerse de aquellas elecciones incorrectas realizadas por ciertas hipótesis iniciales y por estados límites previos que la regla de revisión tarskiana no logra corregir en pasos sucesores.

DEFINICIÓN 3.37 (B_Y) Sea [M,S,B_Y] una secuencia de revisión y sea κ el primer ordinal no enumerable. Sea λ un ordinal límite:

1. si $\omega \leq \lambda \leq \kappa$, $B_Y(\lambda) = S$;

2. si $\lambda > \kappa$, $B_Y(\lambda) = B_Y(\kappa\pi)$, donde π es el único ordinal tal que $\kappa\pi \leq \lambda < \kappa(\pi + 1)$;

3. Para todo $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq |M|$[72] y para todo ordinal β existe un ordinal γ tal que $\kappa\gamma \geq \beta$ y, para todo $\delta \leq \omega$:

Γ_0 si δ es par

72. Esto es, para cualesquiera tres conjuntos de (códigos de) oraciones de L^+.

La l gica de la verdad.indd 166 04/07/2014 13:47:23

$$B_{\Upsilon}(\kappa\gamma + \kappa\delta) = \begin{array}{l} \Gamma_1 \text{ si } \delta \text{ es impar} \\ \Gamma_2 \text{ si } \delta = \omega \end{array}$$

La condición 1 de esta definición establece que S debe ser el bootstrapper asignado a ω y a todos los ordinales límites que se encuentren entre ω y κ. Por su parte, 2 requiere que una vez que se introduce un bootstrapper en una etapa límite λ, éste sea empleado en todos los estados límites entre λ y $\lambda + \kappa$, i.e. durante κ pasos. De este modo, Yaqūb se asegura de que la elección original pueda tener impacto sobre la secuencia, y de que cada elección que se haga posteriormente también lo tenga. La tercera condición asegura que cada tripla de bootstrappers siempre vuelva a aparecer en las secuencias, empleando cada uno de los tres bootstrappers durante κ pasos y alternando estas subsecuencias de longitud $\kappa\,\omega + 1$ veces. Así, cada bootstrapper y cada combinación de dos o tres bootstrappers tendrá acceso irrestricto e igualitario al proceso.

En suma, las secuencias de Yaqūb están diseñadas para dar lugar y capacidad de impacto a cada uno de los subconjuntos de oraciones de L^+. Como veremos en los ejemplos que siguen, las secuencias de Yaqūb solucionan los problemas presentados en los ejemplos 3.30, 3.32 y 3.33, que afectan los sistemas de Herzberger, Gupta y Belnap.

EJEMPLO 3.38 (Bicondicionales de mentirosos) Sean $\Gamma_0 = \emptyset$ y $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \{M\}$. En virtud de la condición 3 de la definición 3.37, en cada secuencia, para todo β existe un γ tal que a partir del paso $\kappa\gamma \geq \beta$ en la secuencia hasta $\kappa\gamma + \kappa\omega$, los bootstrappers Γ_0 y Γ_1 se emplean en segmentos sucesivos de longitud κ. Luego, no existe una etapa en ninguna secuencia a partir de la cual $\emptyset$ y $\{M\}$ no sean utilizados ya. En cada uno de estos períodos de longitud κ, donde se emplean o bien $\emptyset$ o bien $\{M\}$ alternadamente, (3.2) resulta verdadera y falsa, respectivamente. Luego, no se estabiliza dentro ni fuera de la extensión del predicado veritativo, ni siquiera cercanamente, en secuencia alguna. Por ende, la oración es clasificada como paradójica si tomamos en cuenta exclusivamente las secuencias de Yaqūb.

EJEMPLO 3.39 (Gupta puzzles) Sean J_a y J_b como en el ejemplo 3.30. Supongamos que existe una secuencia $[N,S,B_{\Upsilon}]$ en la cual J_a y J_b no se estabilizan dentro y fuera de la extensión del predicado veritativo, respectivamente. En virtud de

La l gica de la verdad.indd 167 04/07/2014 13:47:24

la condición 3 de la definición 3.37, tomando $\Gamma_0 = \Gamma_1 = \Gamma_2 = \{J_a\}$ y $\beta = 0$, debe existir un γ tal que $\{J_a\}$ sea el bootstrapper utilizado en todos los ordinales límites que se encuentran entre $\kappa\gamma$ y $\kappa\omega$, inclusive. Dado que J_a y J_b son inestables a lo largo de toda la secuencia, la condición 3 de la definición 3.5 indica que $J_a \in S_{\kappa\gamma}$, mientras que $J_b \notin S_{\kappa\gamma}$. Pues $S_{\kappa\gamma} = (S^{T}_{\kappa\gamma} \cup B_{\gamma}(\kappa\gamma)) - S^{\perp}_{\kappa\gamma}$ y $B(\kappa\gamma) = \{J_a\}$, pero ni $J_b \in S^{T}_{\kappa\gamma}$, por ser inestable, ni $J_a \in S^{\perp}_{\kappa\gamma}$, por la misma razón. Luego, como podrá comprobar el lector, a partir de $\kappa\gamma + 1$, J_a permanece dentro de la extensión de Tr y J_b fuera, contradiciendo la suposición original.

A diferencia de los sistemas de Herzberger, Gupta y Belnap, el sistema de Yaqūb clasifica a J_a como categóricamente verdadera y a J_b como categóricamente falsa, esto es, les asigna los únicos valores de verdad clásicos que pueden tomar si razonamos intuitivamente acerca de estas oraciones.

EJEMPLO 3.40 (Ciclos de honestos) Sean H_a y H_b como en el ejemplo 3.36. Dejaremos a cargo del lector la prueba de que ambas oraciones son clasificadas como tf-caprichosas por el sistema de Yaqūb, como se quería originalmente.

Tras presentar su sistema, Yaqūb (1993) afirma no haber encontrado error de clasificación alguno. Como veremos a continuación, Chapuis (1996) sí lo encontrará.

3.1.5 El sistema de Chapuis

De acuerdo con Chapuis (1996), muchos de los problemas señalados por Yaqūb en las teorías de Herzberger, Gupta y Belnap son serias dificultades que han de ser solucionadas para obtener una teoría de la verdad materialmente adecuada. Sin embargo, el modo en que Yaqūb soluciona este inconveniente resulta insatisfactorio, como muestra el siguiente ejemplo dado por el mismo Chapuis.

EJEMPLO 3.41 Consideremos la siguiente instancia del esquema T extensional dada por (3.2):

(3.12) $\quad \mathrm{Tr}(\ulcorner M \equiv M'' \urcorner) \equiv (M \equiv M')$

La l gica de la verdad.indd 168 04/07/2014 13:47:24

Siendo que (3.2) es inestable en toda secuencia de Yaqūb, también lo es (3.12). Consideremos ahora esta otra oración:

(3.13) $\exists x(P(x) \wedge Tr(x))$

donde $P(x)$ es una fórmula de L^+ con una variable libre x que en N expresa el conjunto que contiene a (3.12) y a todas las iteraciones de Tr sobre esta oración, esto es:

$$P^N = \{Tr^n(\text{`}Tr(\text{`}M \equiv M'') \equiv (M \equiv M')') : n \in \mathbb{N}\}$$

Luego, (3.13) afirma que hay al menos un número de iteraciones de Tr sobre (3.12) que da lugar a una fórmula verdadera. Puesto que (3.12) es inestable, (3.13) también deberá serlo y, en efecto, es declarada paradójica en el sistema de Yaqūb. Finalmente, consideremos la siguiente y última oración de este ejemplo:

(3.14) $\exists x(Q(x) \wedge Tr(x))$

donde $Q(x)$ es una fórmula de L^+ con una variable libre x que en N expresa el conjunto que contiene a (3.13) y a todas las iteraciones de Tr sobre esta oración, esto es:

$Q^N = \{Tr^n(\text{`}\exists x(P(x) \wedge Tr(x))'): n \in \mathbb{N}\}$

Luego, (3.14) afirma que hay al menos un número de iteraciones de Tr sobre (3.13) que resulta en una fórmula verdadera. Una vez más, como (3.13) es inestable, (3.14) también debería serlo. Sin embargo, (3.14) se estabiliza dentro de la extensión del predicado veritativo las secuencias de Yaqūb; no resulta paradójica en ese sistema, contrario a nuestras expectativas.

Puesto que tanto M como M' son inestables, existen dos tipos de bootstrappers diferentes en cuanto ellas: o bien se encuentran ambas dentro o ambas fuera de la extensión de Tr, o bien están desfasadas, esto es, una dentro y una fuera. Dado que de acuerdo con Yaqūb todo bootstrapper debe permanecer en cada secuencia al menos κ pasos, lo mejor que podemos hacer para desestabilizar a (3.14) es seguir la condición 3 de la definición 3.37 alternando los bootstrappers $\{M\} = \Gamma_0$ y $\emptyset = \Gamma_1 = \Gamma_2$ $\omega + 1$ veces en segmentos de longitud κ. Como veremos a continuación, nuestro mejor intento posible resultará infructuoso.

La l gica de la verdad.indd 169 04/07/2014 13:47:24

Comencemos por un segmento de $\kappa\gamma$ a $\kappa\gamma + \kappa$ para algún ordinal γ con el bootstrapper {M}, donde los mentirosos están fuera de fase y supongamos que previamente no lo estaban, con lo cual (3.2) y todas sus iteraciones de verdad se habían estabilizado localmente como verdaderas.[73] Luego, (3.2) se estabilizará como falsa en todo el segmento. Tr(3.2) copia el comportamiento de (3.2) recién un paso más adelante en cada secuencia, en virtud de la definición 3.5. Por tanto, (3.12) será falsa en $\kappa\gamma$ pero se estabilizará como verdadera en los pasos subsiguientes. Puesto que todas las iteraciones del predicado de verdad sobre una oración copian el comportamiento de esta última tantos pasos más adelante como ocurrencias del predicado veritativo contengan, cada Tr^n(3.12) con $n \in \mathbb{N}$ se estabilizará como verdadera en $\kappa\gamma + n + 1$, y siempre habrá una de ellas que sea verdadera en cada paso del segmento en cuestión. Como P(x) es verdadero precisamente de todas estas oraciones, (3.13) será siempre verdadera en este segmento de longitud κ, al igual que todas sus predicaciones de verdad. Y dado que Q(x) es verdadero de todas estas, (3.14) también será verdadera a lo largo del segmento.

De acuerdo con la condición 3 de la definición 3.37, en $\kappa\gamma + \kappa$ debemos emplear $\emptyset$ como bootstrapper, pues es un segmento impar. Ambos mentirosos dejarán pues de estar desfasados. Las elecciones que aquí hagamos para las otras proposiciones son irrelevantes en tanto se han estabilizado previamente. Sin embargo, es visible que este desfasaje en nada cambiará el comportamiento de las otras oraciones excepto (3.2) a lo largo de este nuevo segmento de longitud κ: tanto (3.13) como (3.14) seguirán siendo verdaderas. Y es evidente que lo mismo sucederá en $\kappa\gamma + \kappa 2$, donde se repiten los valores de $\kappa\gamma$.

En $\kappa\gamma + \kappa\omega$ tenemos la última oportunidad de desestabilizar (3.14). Para hacerlo, debemos tener que, para todo $n \in \mathbb{N}$, Tr^n(3.13) es falsa, pero ningún bootstrapper podrá lograr eso, ya que estas oraciones se han estabilizado como verdaderas en los estados previos a $\kappa\gamma + \kappa\omega$ y están por ello fuera de nuestro alcance. Lo mejor que podemos hacer aquí es desestabilizar (3.13), colocando a cada Tr^n(3.12) fuera de la extensión de Tr, lo cual es posible pues estas oraciones fluctuaron en un punto en cada segmento previo de longitud κ: son inestables desde el punto

73. Como veremos inmediatamente, esta suposición no afectará en nada nuestro intento, pues sea cual fuere el estado de estas oraciones en $\kappa\gamma$, tras un número finito de pasos el resultado será el mismo.

La l gica de la verdad.indd 170 04/07/2014 13:47:24

de vista de $\kappa\gamma + \kappa\omega$. Pero esto no es suficiente, pues sólo conduce a que (3.13) sea falsa en un número finito de estados subsiguientes, volviendo a estabilizarse como verdadera después, con lo cual (3.14) será establemente verdadera también en este segmento. La siguiente tabla ilustra el razonamiento que llevamos a cabo en los párrafos anteriores.

	$\kappa\gamma$	$\kappa\gamma + \kappa$	$\kappa\gamma + \kappa 2$	...	$K\gamma + \kappa\omega$
M	f t f t...	t f t f...	f t f t...		t f t f...
M´	t f t f...	t f t f...	t f t f...		t f t f...
(3.2)	f f f f...	t t t t...	f f f f...		t t t t...
Tr(3.2)	t f f f...	f t t t...	t f f t...		f t t t...
(3.12)	f t t t...	f t t t...	f t t t...		f t t t...
Tr(3.12)	t f t t...	t f t t...	t f t t...		f f t t...
Tr^2(3.12)	t t f t...	t t f t...	t t f t...		f f f t...
(3.13)	t t t t...	t t t t...	t t t t...		f t t t...
Tr(3.13)	t t t t...	t t t t...	t t t t...		t f t t...
Tr^2(3.13)	t t t t...	t t t t...	t t t t...		t t f t...
(3.14)	t t t t...	t t t t...	t t t t...		t t t t...

La idea que guía este ejemplo está basada en que la desestabilización progresiva que se despliega desde las primeras oraciones –M y M′– no tiene alcance suficiente para desestabilizar a (3.14). Sería preciso que consideráramos segmentos sucesivos más y más largos para evaluar esta oración en el segmento ω; pero entonces podríamos pensar en otra oración que no llegue a desestabilizarse sino al tener en cuenta segmentos aún más largos, y así sucesivamente.

De acuerdo con Chapuis, las fallas del enfoque de Yaqūb yacen en que los bootstrappers son los responsables de introducir la variedad de opciones necesaria para evitar errores de clasificación, de la cual los sistemas de Herzberger, Gupta y Belnap carecen. Propone, por tanto, un modo alternativo de llevar a cabo esa tarea.

La l gica de la verdad.indd 171 04/07/2014 13:47:24

DEFINICIÓN 3.42 (Coherencia) Sea $[M,S]$ una secuencia de revisión. La hipótesis $S' \subseteq |M|$ es *coherente* con $[M,S]$ si y sólo si, para toda fórmula A de L^+:

- si existe un α tal que para todo $\beta \geq \alpha$ $(M,S_\beta) \models \mathsf{A}$, $\mathsf{A} \in S'$;
- si existe un α tal que para todo $\beta \geq \alpha$ $(M,S_\beta) \not\models \mathsf{A}$, $\mathsf{A} \notin S'$.

Luego, una hipótesis es coherente con una secuencia si contiene todas las oraciones establemente verdaderas en esa secuencia y ninguna de las establemente falsas.

DEFINICIÓN 3.43 (Secuencias completamente variadas) $[M,S]$ es una secuencia completamente variada si y sólo si es una secuencia de revisión y para toda hipótesis S' coherente con $[M,S]$ y para todo ordinal α existe un $\beta \geq \alpha$ tal que $S_\beta = S'$.

Una secuencia de revisión es pues completamente variada siempre y cuando toda hipótesis coherente con ella esté presente indefinidamente en ella, esto es, no exista una etapa en la secuencia a partir de la cual no podamos encontrarla ya. Estas secuencias fueron originalmente consideradas por Gupta y Belnap (1993) y bautizadas por ellos.

La propuesta de Chapuis no consiste en una nueva política de bootstrapping. La presencia indefinida de hipótesis coherentes con la secuencia puede darse tanto en etapas límites como sucesoras. Además, las secuencias completamente variadas no pueden construirse en cada etapa sino que son seleccionadas de la clase de secuencias de revisión definidas en 3.5. Las políticas de bootstrapping de Belnap y Yaqūb resultan demasiado permisivas, pues incluyen secuencias en las cuales muchas extensiones coherentes son ignoradas. Así, dan lugar a errores de clasificación. Como veremos, las secuencias de Chapuis evitan todas las dificultades de este tipo que hemos mencionado.

EJEMPLO 3.44 (Bicondicionales de mentirosos) Sea $[N,S]$ una secuencia completamente variada. Puesto que en cualquier secuencia las oraciones del mentiroso son inestables, sabemos que existen hipótesis S' y S'' coherentes con $[M,S]$ tales que M pertenece a S pero no M' y ninguna de las dos pertenece a S'' .

La l gica de la verdad.indd 172 04/07/2014 13:47:24

Por la definición 3.43, S' y S'' estarán presentes a lo largo de toda la secuencia. Dado que en (N,S') $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}'$ es falsa, mientras que en (N,S'') es verdadera, (3.2) es inestable en $[N,S]$, con lo cual es clasificada como paradójica por el sistema de Chapuis.

EJEMPLO 3.45 (Gupta puzzles) Sean $\mathbf{J}_a$ y $\mathbf{J}_b$ como en el ejemplo 3.30. Allí hemos visto que, una vez que estas oraciones están fuera de fase, $\mathbf{J}_a$ se estabiliza como verdadera y $\mathbf{J}_b$ como falsa. Supongamos entonces que existe una secuencia completamente variada $[M,S]$ en la cual esto no sucede, esto es, tal que para todo α o bien ambas oraciones pertenecen a S_α o bien ninguna lo hace. Como muestra la tabla del ejemplo 3.30, $\mathbf{J}_a$ y $\mathbf{J}_b$ oscilarán sincronizadamente a lo largo de toda la secuencia. Luego, existe una hipótesis S' coherente con $[M,S]$ tal que $\mathbf{J}_a \in S'$ y $\mathbf{J}_b \notin S'$. En virtud de la definición 3.43, debe existir un β tal que $S' = S_\beta$, lo cual es un absurdo, pues dijimos que las oraciones estaban en fase a lo largo de toda la secuencia.

EJEMPLO 3.46 (Ciclos de honestos) Sean $\mathbf{H}_a$ y $\mathbf{H}_b$ como en el ejemplo 3.36. Dejaremos que el lector compruebe que estas oraciones son clasificadas como tf-caprichosas por el sistema de Chapuis.

Aún no han surgido errores de clasificación en la teoría de la revisión basada en secuencias completamente variadas. No obstante, no tenemos ninguna certeza de que no los haya ni de que no vayamos a encontrarlos en el futuro.

Ejercicios para la subsección 3.1

1. Muestre que mediante un argumento intuitivo que haga uso del esquema-T extensional las oraciones $\mathbf{K}_a$ y $\mathbf{K}_b$ del ejemplo 3.32 resultan verdadera y falsa, respectivamente. Pruebe que el sistema de Herzberger las clasifica como categóricamente verdadera y categóricamente falsa, correspondientemente.
2. Muestre que mediante un argumento intuitivo que haga uso del esquema-T extensional las oraciones $\mathbf{P}_a$ y $\mathbf{P}_b$ del ejemplo 3.33 resultan verdadera y falsa, respectivamente. Pruebe que el sistema de Herzberger las clasifica como categóricamente verdadera y categóricamente falsa, correspondientemente.

La l gica de la verdad.indd 173 04/07/2014 13:47:24

3. Pruebe que en el sistema de Gupta la oración (3.2) es clasificada como tf-caprichosa.
4. Pruebe que el sistema de Gupta arroja los mismos resultados que el de Herzberger para los conjuntos de oraciones presentados en los ejemplos 3.30, 3.32 y 3.33.
5. Pruebe que tanto el sistema de Yaqūb como el de Chapuis clasifican oraciones como H_a y H_b en (3.10) como tf-caprichosas.
6. Muestre que no toda secuencia de Herzberger es una secuencia de Gupta ni, viceversa, toda secuencia de Gupta es una secuencia de Herzberger.
7. Pruebe que:

   (a) El conjunto de oraciones de L^+ que son establemente verdaderas en el sistema de Belnap está incluido en el de aquellas que lo son en el de Gupta, que a su vez está incluido en el conjunto de oraciones establemente verdaderas en el sistema de Herzberger.

   (b) El conjunto de oraciones de L^+ que son establemente falsas en el sistema de Belnap está incluido en el de aquellas que lo son en el de Gupta, que a su vez está incluido en el conjunto de oraciones establemente falsas en el sistema de Herzberger.

   (c) El conjunto de oraciones de L^+ que son paradójicas en el sistema de Belnap está incluido en el de aquellas que lo son en el de Gupta, que a su vez está incluido en el conjunto de oraciones paradójicas en el sistema de Herzberger.
8. Indique qué categorías de las siete introducidas en la definición 3.10 le son asignadas a las oraciones $\mathrm{M} \wedge \mathrm{M}'$ y $\mathrm{M} \vee \mathrm{M}'$, donde M y M′ son como en (2.6) y (3.1), respectivamente, en cada uno de los sistemas presentados en esta subsección.
9. Sea F una oración de L^+ tal que, para todo $S \subseteq |N|$:

   (3.15) $(N,S) \vDash \mathrm{F} \equiv (\mathrm{Tr}(\text{`F'}) \supset \mathrm{Tr}(\text{`Tr(`F')'}))$

   (a) Desarrolle un argumento intuitivo que muestre que existe una única asignación estable de valores de verdad clásicos para F y señale cuál es esta asignación.

   (b) Indique qué categoría de las dadas por la definición 3.10 asigna cada uno de los sistemas presentados en esta subsección a F.

   (c) ¿Debería una teoría de la verdad asignar a F la única asignación estable de valores de verdad clásicos posible o debería permitir que F sea inestable en algunas secuencias?

La l gica de la verdad.indd 174 04/07/2014 13:47:24

10. ¿Debería una teoría de la verdad solucionar los Gupta puzzles como quiere Yaqūb o debería dar lugar a las inestabilidades que esos conjuntos de oraciones infundadas presentan en sistemas como el de Belnap? ¿O la respuesta a la pregunta anterior debería variar según el conjunto de oraciones infundadas de que se trate?

3.2 Venganzas

Entendemos que los fenómenos conocidos como 'venganzas' o 'revanchas' surgen dentro de teorías que pretenden ser semánticamente autosuficientes, esto es, que pretenden expresar correctamente sus propias categorías semánticas, y sin embargo no logran expresar esos mismos conceptos que ellas generan. Bajo esta perspectiva, entendemos que la teoría revisionista de la verdad carece de revanchas, ya que su objetivo es, como hemos señalado en la introducción a este capítulo, dar con una teoría que dé cuenta del uso del predicado de verdad para un lenguaje que contenga el suyo propio, y no simultáneamente de todos los predicados semánticos que puedan existir, inclusive los que ella misma genera.

Si este último fuera el objetivo de la teoría de la revisión, estaría en efecto plagada de venganzas. Gupta y Belnap (1993) mismos señalan este hecho y lo ejemplifican mediante la noción de categoricidad –aplicable a todas las oraciones categóricamente verdaderas y categóricamente falsas– a la cual su teoría da lugar.[74] El siguiente teorema les pertenece.

TEOREMA 3.47 (Indefinibilidad de la categoricidad) No existe un predicado Ca de L^+ que sea verdadero en N de todas las oraciones categóricas en $\mathbf{T}^{\#}$ en N.[75]

Prueba: Supongamos que Ca expresa en N la noción de categoricidad en $\mathbf{T}^{\#}$ en N. Gracias al lema de diagonalización, sabemos de la existencia de una oración Q en L^+ tal que para todo $S \subseteq |N|$:

$$(N,S) \vDash \mathrm{Q} \equiv (\neg \mathrm{Ca}(\text{`Q'}) \vee \neg \mathrm{Tr}(\text{`Q'})) \tag{3.16}$$

74. Véase Gupta y Belnap (1993: cap. 6, sec. D y cap. 7, sec. I).

75. Mediante pruebas prácticamente idénticas es posible establecer resultados análogos para $\mathbf{T}^{*}$ y $\mathbf{T}^{c}$.

La l gica de la verdad.indd 175 04/07/2014 13:47:25

O bien $Q \in V^{\#}_{N}$ o bien $Q \notin V^{\#}_{N}$. En el primer caso, también $Tr(\text{`}Q\text{'}) \in V^{\#}_{N}$ y, además, Q será categórica, con lo cual $Ca(\text{`}Q\text{'}) \in V^{\#}_{N}$. Pero por (3.16) esto implica que $Q \notin V^{\#}_{N}$, lo cual es un absurdo. Luego, $Q \notin V^{\#}_{N}$, esto es, o bien $\neg Q \in V^{\#}_{N}$ o bien Q no es categórica. Si lo primero sucede, $\neg Tr(\text{`}Q\text{'}) \in V^{\#}_{N}$. En el segundo caso, $\neg Ca(\text{`}Q\text{'}) \in V^{\#}_{N}$. Por (3.16), en ambos casos tenemos que $Q \in V^{\#}_{N}$, lo cual es imposible.

Gupta y Belnap llaman a Q 'mentiroso reforzado', pues su estructura es en todo semejante a la del mentiroso, excepto en que en lugar de utilizar sólo el predicado de verdad emplea también el de categoricidad. Al igual que en el caso del mentiroso tradicional, la reacción de Gupta y Belnap ante el argumento dado en la prueba del teorema 3.47 no consiste en sostener que es imposible tener tal noción para un lenguaje dentro del mismo lenguaje sin efectuarle modificación alguna. En cambio, sostienen que el argumento entiende incorrectamente el bicondicional involucrado en la definición de la noción de categoricidad como si fuera un bicondicional material:

$Ca(\text{`}A\text{'})$ si y sólo si $A \in V^{\#}_{N}$ ó $\neg A \in V^{\#}_{N}$

donde A es cualquier oración de L^{+}. De acuerdo con estos autores, la noción de categoricidad es análoga al concepto de verdad y tan circular como él. Requiere por tanto una definición circular dada por un esquema como el presentado en (2.1).

Sea L^{++} es resultado de incorporar a L^{+} un nuevo símbolo de predicado monádico Ca. Consideraremos las siguientes definiciones parciales para Ca:

(3.17) $\qquad Ca(\text{`}A\text{'}) =_{df}$ A es categórica en $T^{\#}$ en M

donde A es una oración cualquiera de L^{++} y M una interpretación de L. Como la categoricidad es un concepto circular, para evaluar si una oración es o no categórica precisamos una hipótesis que revisar. Basándonos en (3.17), podemos definir una regla de revisión de hipótesis ψ_{M} que haga esta tarea.

DEFINICIÓN 3.48 (ψ_{M}) ψ_{M} es una regla de revisión basada en M tal que ψ_{M}: $P(|M|) \rightarrow P(|M|)$ y

$\psi_{M}(S) = \{d: A \in V^{\#}_{(M;S)}$ ó $\neg A \in V^{\#}_{(M;S)}$ y d es el número de Gödel de A $\}$

La l gica de la verdad.indd 176 04/07/2014 13:47:25

donde $(M;S)$ es la expansión de M a un modelo parcial de L^{++} que asigna S a Ca como su interpretación y deja Tr sin interpretar.[76]

Luego, dada una extensión hipotética S para Ca, evaluamos si una oración cae o no bajo la extensión de Ca de acuerdo con esta hipótesis, estudiando si resulta categórica en el sistema $\mathsf{T}^{\#}$ empleando como modelo base a $(M;S)$. Las definiciones de 'secuencia de revisión basada en la regla ψ_M' y las consecuentes nociones de estabilidad, estabilidad cercana y validez son análogas a las que hemos presentado en la sección 2.

Parece que hemos logrado un lenguaje L^{++} que contiene no sólo su propio predicado veritativo sino también su propio predicado de categoricidad. Esta teoría puede lidiar con oraciones como el mentiroso reforzado, como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.49 (El mentiroso reforzado) Mediante el lema de diagonalización, tenemos una oración M^* en L^{++} tal que para todo $S \subseteq |N|$:

$$(N;S) \models \mathsf{M}^* \equiv (\neg \mathsf{Ca}(\text{`}\mathsf{M}^*\text{'}) \vee \neg \mathsf{Tr}(\text{`}\mathsf{M}^*\text{'})) \tag{3.18}$$

M^* oscila a lo largo de todo el proceso de revisión para Ca, independientemente de la hipótesis inicial con la cual comencemos. Si elegimos una hipótesis S a la cual esta oración pertenezca, M^* se comportará como una oración del mentiroso en todo el proceso de revisión para Tr basado en $(N;S)$, pues $\neg\mathsf{Ca}(\text{`}\mathsf{M}^*\text{'})$ resultará siempre falsa allí. Luego, quedará afuera en el siguiente paso de revisión. Si en cambio, comenzamos con una hipótesis $S'$ tal que $\mathsf{M}^* \notin S'$, $\neg\mathsf{Ca}(\text{`}\mathsf{M}^*\text{'})$ será verdadera a lo largo de todo el proceso de revisión para Tr basado en $(N;S')$ y, por ende, lo mismo sucederá con M^*. Luego ingresará en la extensión de Ca en el paso siguiente, repitiéndose el razonamiento que llevamos a cabo primero.

No obstante, esta teoría no logra dar cuenta correctamente de otras oraciones relevantes, como el honesto reforzado, como veremos a continuación.

76. Nótese que cuando hablamos de este nuevo tipo de expansiones de un modelo M para L escribimos ';' en lugar de ','.

La l gica de la verdad.indd 177 04/07/2014 13:47:25

EJEMPLO 3.50 (El honesto reforzado) Una vez más, el lema de diagonalización garantiza la existencia de una oración H* en L^{++} tal que para todo $S \subseteq |N|$:

(3.19) $(N;S) \vDash \mathrm{H}^* \equiv (\mathrm{Ca}(\text{`H*'}) \vee \neg \mathrm{Tr}(\text{`H*'}))$

Como podrá comprobar el lector en los ejercicios para esta subsección, H* resulta verdadera si pertenece a la hipótesis inicial del proceso de revisión para Ca y falsa en caso contrario. Luego, no es cierto que ¬Ca('H*') de acuerdo con la teoría revisionista de la categoricidad. La patologicidad del honesto reforzado no puede ser descripta por ella.

De acuerdo con Gupta y Belnap (1993), lejos de ser una dificultad, esto es una manifestación de la necesidad de nociones de orden superior para dar cuenta de la patologicidad de oraciones que involucran conceptos semánticos.

En el caso de la teoría revisionista de la verdad, no resulta correcto afirmar que el honesto no es verdadera ni falsa para dar cuenta de su carácter patológico, pues Tr('H')∨¬Tr('H') es verdadera allí. Más bien necesitamos predicados como 'categórica' para esa tarea. Del mismo modo, el comportamiento patológico de oraciones como H*, cuya patologicidad se debe a la presencia del predicado de categoricidad, precisa nociones de orden superior para ser explicado, y así sucesivamente. Gupta y Belnap sostienen que estas nociones son semejantes a la verdad: todas ellas son circulares, dan lugar a oraciones patológicas si el lenguaje tiene capacidades autorreferenciales y apuntan hacia la existencia de nociones de orden aun superior para explicarlas.

Si bien la propuesta de Gupta y Belnap (1993) no es capaz de recoger estos conceptos en una misma teoría si no que recurre a jerarquías, no consideramos que se encuentre por ello en desventaja con respecto a otras teorías semánticas. Pues éste nunca fue su objetivo, sino dar cuenta del comportamiento de predicados semánticos como la verdad para un lenguaje dentro del lenguaje mismo, y ha sido perfectamente alcanzado. Aún más, Gupta y Belnap han mostrado cómo llevar a cabo esta tarea para conceptos de orden superior, como el de categoricidad y cualquier otro concepto semejante capaz de dar lugar a oraciones patológicas.

Ejercicios para la subsección 3.2 1.

1. Pruebe resultados análogos al teorema 3.47 para las nociones de validez y paradojicidad en T* en *N*.

La l gica de la verdad.indd 178 04/07/2014 13:47:25

2. Defina las nociones de paradojicidad y validez y dé una regla de revisión para cada una de estas nociones como lo hemos hecho para el concepto de categoricidad en (3.17) y en la definición 3.48, correspondientemente.
3. Sea H* como en el ejemplo 3.50. Pruebe que esta oración es tf-caprichosa de acuerdo con la teoría de la categoricidad presentada en esta subsección.

4. Conclusiones

El propósito de la teoría revisionista es lograr describir el uso del concepto de verdad transparente dentro de un lenguaje clásico que contiene su propio predicado veritativo. Tras destacar el carácter circular de la verdad, concluimos la imposibilidad de dar con una extensión definitiva para dicho concepto y la necesidad, en cambio, de considerar secuencias de extensiones o modelos para este lenguaje. Atendiendo a regularidades exhibidas por dichas secuencias, obtuvimos un conjunto de oraciones correctamente asertables.

Más aún, notamos que la consideración de tales secuencias permite una clasificación de todas las oraciones del lenguaje en siete categorías semánticas capaces de distinguir, entre otras cosas, entre oraciones patológicas y no patológicas. No obstante, vimos que no existe un único modo de llevar adelante esta tarea de clasificación. Presentamos diversas alternativas y los respectivos desafíos que ellas afrontan.

Si bien hemos puesto en duda la necesidad de dar una solución a los problemas planteados por los Gupta puzzles, creemos que es preciso clasificar correctamente los bicondicionales de oraciones mentirosas como paradójicos y los ciclos de honestos como tf-caprichosos. Tanto el sistema de Yaqūb como el de Chapuis cumplen este cometido. Sin embargo, como muestra el ejemplo 3.41, el primero clasifica erróneamente otras oraciones, razón por la cual –dejando de lado los Gupta puzles– la teoría de Chapuis parece ser por el momento la mejor candidata.

A diferencia de lo que sucede con otras teorías presentadas en este libro, la teoría revisionista no se propone ser semánticamente autosuficiente y, por ende, las venganzas generadas por oraciones como (3.19) no constituyen una auténtica amenaza para ella.

La l gica de la verdad.indd 179 04/07/2014 13:47:25

Finalmente, en el apéndice veremos que el afán de obtener una teoría semánticamente autosuficiente o de privilegiar la certeza epistémica por sobre el poder expresivo puede llevarnos a optar por un abordaje de tipo formal, que intente axiomatizar el conjunto de oraciones correctamente asertables de acuerdo con la teoría de la revisión.

La l gica de la verdad.indd 180 04/07/2014 13:47:25

Apéndice: Un punto de vista axiomático

Razones para adoptar un enfoque axiomático

Se llama 'teorías semánticas' a aquellas teorías de la verdad que proporcionan una clase de modelos. Todas las teorías presentadas en los cuerpos principales de los capítulos de este libro son consideradas teorías semánticas en la literatura. Tal vez esta clasificación no sea del todo justa para con la teoría revisionista de la verdad, en tanto su resultado no es una clase de modelos, sino un conjunto de oraciones correctamente asertables. No obstante, dado que recurre a clases de modelos para obtener este conjunto de oraciones, puede ser laxamente considerada una teoría semántica, y así lo haremos aquí.

En todas las teorías semánticas de la verdad, la consideración de los modelos para un lenguaje que contiene su propio predicado veritativo se lleva a cabo desde un lenguaje 'esencialmente más rico', esto es, con mayor capacidad expresiva que el lenguaje base.[77] En el caso de la teoría revisionista, mientras que el lenguaje base es el de la aritmética junto con un predicado de verdad, el metalenguaje es aún más expresivo que el de la teoría de conjuntos, pues cuantifica sobre secuencias cuyo ordinal es el de todos los conjuntos.

Es el proyecto de muchos teóricos de la verdad actuales dar con un lenguaje semánticamente autosuficiente, evitando todo tipo de revanchas —aunque no el de Gupta y Belnap (1993), como señalamos en la sección 3.2. Un modo de llevar a cabo esta tarea en el marco de la teoría de la revisión consiste en axiomatizar la teoría en el mismo lenguaje para el cual está formulada. De ese modo, no habría una distinción entre lenguaje y metalenguaje. El conjunto de oraciones correctamente asertables de L^+ se obtendría, ya no observando clases de modelos, sino haciendo derivaciones.

La obtención de teorías semánticamente suficientes no es la única razón por la cual un abordaje axiomático de la verdad podría resultar atractivo. Existen factores epistémicos que podrían embarcarnos en el proyecto formal. Mientras que las teorías semánticas de la verdad no proporcionan un método seguro para extraer conclusiones a partir de clases de modelos, los sistemas axiomáticos son candidatos ideales.

77. Véase el capítulo primero de este libro.

La l gica de la verdad.indd 181 04/07/2014 13:47:25

Naturalmente, esta seguridad se obtiene a expensas de una gran pérdida de información. Ninguna teoría semántica puede ser completamente capturada por una axiomatización recursiva, i.e. para la cual contemos con un algoritmo que nos permita saber si una fórmula dada es o no un axioma de la teoría, que es esencial si lo que buscamos es certeza epistémica. Pues todas parten de un modelo base como *N*, el cual no es recursivamente axiomatizable. No obstante, existen mejores y peores axiomatizaciones. Lamentablemente, como veremos a continuación, la teoría de la revisión no admite versiones formales tan buenas como, por ejemplo, la teoría de punto fijo de Kripke, presentada en el capítulo anterior.

Una versión axiomática de $V^{\#}_{N}$

Harvey Friedman y Michael Sheard (1987) han presentado una teoría axiomática de la verdad para un lenguaje con su propio predicado veritativo, hoy conocida como '*FS*'. La presentación que hacemos a continuación es ligeramente diferente pero equivalente a la original.[78]

DEFINICIÓN 3.51 (*FS*) *FS* es una teoría de primer orden formulada en L^{+} cuyos axiomas son los de la aritmética de Peano de primer orden con inducción sobre todas las fórmulas de L^{+}, (Tr¬), (Tr∧), (Tr∀),

(At+) $\forall x(\mathrm{At}(x) \supset (\mathrm{Tr}(x) \equiv \mathrm{Ver}(x)))$

y cuyas reglas de inferencia son las de necesitación y co-necesitación. Si A es una oración de L^{+}:

(NEC) De una prueba de A inferir Tr('A');

(CONEC) De una prueba de Tr('A') inferir A.

Visiblemente, todos los axiomas de *PA* pertenecen a $V^{\#}_{N}$, pues son verdaderos en todos los pasos de todas las secuencias basadas en *N*. El teorema 3.24 establece que (Tr¬), (Tr∧) y (Tr∀) también pertenecen a $V^{\#}_{N}$. Y el teorema 3.10

78. Véase Halbach (1994) para una prueba.

La l gica de la verdad.indd 182 04/07/2014 13:47:25

muestra que este conjunto está cerrado bajo (NEC) y (CONEC). Finalmente, es inmediato –y podrá comprobar el lector– que (At+), que afirma que todas las oraciones atómicas de *L* verdaderas en *N* son verdaderas de acuerdo con la teoría, también pertenece a $\mathbf{V}^{\#}_{N}$. Consecuentemente, el teorema 3.18 nos asegura que *FS* es cercanamente establemente verdadera y, por ende, un buen candidato para la axiomatización de $\mathbf{V}^{\#}_{N}$. Al igual que $\mathbf{V}^{\#}_{N}$, *FS* es ω-inconsistente.[79] Luego, todos los problemas que esta característica trae a $\mathbf{T}^{\#}$ son heredados por *FS*.

Una versión axiomática de $\mathbf{V}^{*}_{N}$

Puesto que los axiomas composicionales no son establemente verdaderos, como indican el teorema 3.24 y el corolario 3.25, *FS* no sirve como axiomatización de $\mathbf{V}^{*}_{N}$ y encontrar un buen candidato parece complicado. Leon Horsten, Graham Leigh, Leitgeb y Philip Welch (2012) han propuesto la siguiente axiomatización, no de $\mathbf{V}^{*}_{N}$, sino del sistema de verdad estable de Herzberger, donde las secuencias consideradas aplican únicamente el bootstrapper vacío y, por ende, tornan verdaderos principios como (Tr∧) y (Tr∀).[80]

DEFINICIÓN 3.52 (*FSPos*) *FSPos* es una teoría de primer orden formulada en L^{+} cuyos axiomas son los de la aritmética de Peano de primer orden con inducción sobre todas las fórmulas de L^{+}, (At+), (Tr∧), (Tr∀), (LNC),

(At-) $\forall x(\mathrm{At}(x) \supset (\mathrm{Tr}([\neg]x) \equiv \mathrm{Fal}(x)))$

(LIC) $\forall x \forall y(\mathit{Sent}_{L+}(x) \supset ((\mathrm{Tr}([\neg]x) \vee \mathrm{Tr}([\neg]y)) \supset \mathrm{Tr}([\neg](x[\wedge]y))))$

(PMP) $\forall x \forall y(\mathit{Sent}_{L+}(x) \supset ((\mathrm{Tr}(x) \wedge \mathrm{Tr}([\neg](x[\wedge][\neg]y)) \supset \mathrm{Tr}(y)))$

(LIQ) $\forall x \forall v((\mathrm{var}(v) \wedge \mathit{Sent}_{L+}(x([0]/v))) \supset (\exists y \mathrm{Tr}([\neg]x([y]/v)) \supset \mathrm{Tr}([\neg][\forall v]x)))$

y cuyas reglas de inferencia son (NEC) y (CONCEC).

79. La prueba es análoga a la del teorema 3.27.
80. Véase la subsección 3.1.1 de este capítulo.

La l gica de la verdad.indd 183 04/07/2014 13:47:25

(At-) expresa que la negación de una fórmula atómica de *L* será verdadera cuando esta fórmula sea falsa. (LIC)[81] expresa que si alguno de los conyuntos es falso será falsa la conjunción, mientras que (PMP)[82] expresa la validez de un principio semejante al Modus Ponens, pero anidado dentro del predicado veritativo. Finalmente, (LIQ)[83] expresa la interacción entre los cuantificadores.

Las conversas de (LIC) y (LIQ) no han sido incluidas pues no son establemente verdaderas en toda secuencia de Herzberger. El teorema 3.19 establece la validez de (NEC) y (CONEC) en ese sistema. La prueba de que los axiomas de *FSPos* para Tr son establemente verdaderos quedará a cargo del lector.

FSPos es un subsistema de *FS* en el cual sólo axiomas positivos han sido incluidos, esto es, se ha prescindido de (Tr¬), que nos permitía incluir una oración dentro de la extensión del predicado veritativo cada vez que supiéramos que su negación estaba fuera. Para compensar el poder de prueba perdido por el abandono de este principio, se han incorporado otros que nos indican cómo lidiar con fórmulas negadas en algunos casos particulares.

Resta proporcionar una axiomatización de V^c_N. Aquí no es posible recurrir a secuencias de Herzberger, pues éstas no son máximamente consistentes. Sin embargo, la tarea es muy sencilla a la luz de los teoremas 3.19 y 3.24. La dejaremos por tanto a cargo del lector.

Tanto *FS* como *FSPos* son axiomatizaciones muy incompletas de sus respectivos conjuntos. Un modo de verlo es notar que, por ejemplo, la oración Tr^n('0=0'), que es establemente verdadera y, por ende, también cercanamente establemente verdadera, no es un teorema de *FS* ni, *a fortiori*, de *FSPos*. En general, ninguna de las dos axiomatizaciones que hemos presentado aquí es capaz de probar iteraciones transfinitas del predicado veritativo,[84] mientras que la teoría revisionista incluye todas las iteraciones transfinitas correctas del conjunto de oraciones asertables. En cambio, la axiomatización de la teoría de punto fijo de Kripke, *KF*, sí es capaz de probar iteraciones transfinitas del predicado de verdad y, aún más, todos los modelos de esta teoría son puntos fijos en el sistema kripkeano, como se ha mencionado en el segundo capítulo de este libro. No existe ningún resultado análogo para la teoría de la revisión.

81. Sus siglas en inglés están por 'Law of Interdefinition of Connectives'.
82. Sus siglas en inglés están por 'Pseudo *Modus Ponens*'.
83. Sus siglas en inglés están por 'Law of Interde nition of Quanti ers'.
84. Véase Horsten (2011: prop. 48) para una prueba.

La l gica de la verdad.indd 184 04/07/2014 13:47:25

Ejercicios para el apéndice

1. Pruebe que (At+) pertenece a $\mathbf{V}^{\#}_{N}$.
2. Pruebe que (At+), (At−), (Tr∧), (LIC), (PMP), (LNC), (Tr∀) y (LIQ) son establemente verdaderos en toda secuencia de Herzberger basada en *N*.
3. Pruebe que las conversas de (LIC) y (LIQ) no son establemente verdaderas en toda secuencia de Herzberger basada en *N*.

Bibliografía

Antonelli, G.A. (1994): "The complexity of revision", en *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 3, pp. 204-218.

— (2002): "The complexity of revision, revised", en *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 43, pp. 75-78.

Barrio, E. (2010): "Theories of Truth without Standard Models and Yablo's Sequences", en *Studia Logica*, vol. 96, pp. 375-391.

Barrio, E. y Picollo, L. (2013): "Notes on Ω-Inconsistent Theories of Truth in Second-Order Languages", en *The Review of Symbolic Logic,* vol. 6, pp. 733-741.

Belnap, N. D. (1982): "Gupta's Rule of Revision Theory of Truth", en *Journal of Philosophical Logic*, vol. 11, pp. 113-116.

Chapuis, A. (1996): "Alternative Revision Theories of Truth", en *Journal of Philosophical Logic*, vol. 25, pp. 399-423.

Cook, R. T. (2002): "Counterintuitive Consequences of the Revision Theory of Truth", en *Analysis*, vol. 62, pp. 16-22.

— (2003): "Still Counterintuitive: A Reply to Kremer", en *Analysis*, vol. 63, pp. 257-261.

Friedman, H. y Sheard, M. (1987): "An Axiomatic Approach to Self-Referential Truth", en *Annals of Pure and Applied Logic*, vol. 33, pp. 1-21.

Gupta, A. (1982): "Truth and Paradox", en *Journal of Philosophical Logic*, vol. 11, pp. 1-60.

Gupta, A. y Belnap. N. D. (1993): *The Revision Theory of Truth*, Cambridge, MIT Press.

Herzberger, H. G. (1982a): "Notes on Naive Semantics", en *Journal of Philosophical Logic*, vol. 11, pp. 61-102.

La l gica de la verdad.indd 185 04/07/2014 13:47:25

— (1982b): "Naive Semantics and the Liar Paradox", en *The Journal of Philosophy*, vol. 79, pp. 479-497.
Halbach, V. (1994): "A System of Complete and Consistent Truth", en *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 35, pp. 311-327.
— (2011): *Axiomatic Theories of Truth*, Cambridge, Cambridge University Press.
Halbach, V. y Horsten, L. (2005): "The Deflationist's Axioms for Truth", en Armour-Garb, B. y Beall, J. C. (eds.), *Deflationism and Paradox*, Oxford, Oxford University Press, pp. 203-217.
Horsten, L. (2011): *The Tarskian Turn. Defiationism and Axiomatic Truth*, Cambridge, MIT Press.
Horsten, L., Leigh, G., Leitgeb, H. y Welch, P. (2012): "Revision Revisited", en *Review of Symbolic Logic*, vol. 5, pp. 642-664.
Kremer, M. (2002): "Intuitive Consequences of the Revision Theory of Truth", en *Analysis*, vol. 62, pp. 330-336.
Kripke, S. (1975): "Outline of a Theory of Truth", en *The Journal of Philosophy*, vol. 72, pp. 690-716.
Leitgeb, H. (2007): "What Theories of Truth Should Be Like (But Cannot Be)", en *Philosophy Compass*, vol. 2, pp. 276-290.
McGee, V. (1985): "How Truth-Like can a Predicate Be? A Negative Result", *Journal of Philosophical Logic*, vol. 14, pp. 399-410.
Yaqūb, A. M. (1993): *The Liar Speaks the Truth. A Defense of the Revision Theory of Truth*, Nueva York, Oxford University Press.

Bibliografía comentada

El punto de partida de cualquier profundización en el estudio de las teorías revisionistas de la verdad es sin duda el ya clásico *The Revision Theory of Truth* de Gupta y Belnap. Para obtener un panorama más acabado respecto de la discusión sobre políticas de bootstrapping alternativas los trabajos de Yaqūb (1993), Chapuis (1996) y Belnap (1986) resultan de suma utilidad. Por último, hemos mencionado en el apéndice algunas limitaciones en cuanto a las posibilidades de axiomatización de la teoría reviosionista, sin embargo, existen resultados interesantes que ponen coto a dichas limitaciones. El lector interesado en estas cuestiones puede visitar Antonelli (1994; 2002).

La l gica de la verdad.indd 186 04/07/2014 13:47:26

Capítulo 4
Paracompletitud sofisticada

Lucas Rosenblatt y Federico Pailos

1. Introducción

La teoría de paracompleta de la verdad que presentaremos en este capítulo tiene como principal defensor a Hartry Field. En estos últimos años, Field ha publicado una serie de artículos y un libro (2002; 2003; 2005; 2006; 2007; 2008) donde sugiere que su teoría no sólo resuelve exitosamente las paradojas vinculadas con la verdad, sino también otro tipo de paradojas vinculadas a la vaguedad y la teoría ingenua de las propiedades. La idea fundamental detrás de este enfoque es que el principio responsable por la generación de estas paradojas es la Ley de Tercero Excluido.

La teoría de Field puede entenderse como una extensión de la teoría de la verdad como punto fijo (mínimo) propuesta por Kripke. Tal vez los dos problemas más serios de la propuesta kripkeana sean: (i) la falta de un condicional apropiado; y (ii) la falta de medios expresivos para caracterizar aquellas oraciones que no son ni verdaderas ni falsas. El problema (i) surge del hecho de que la semántica trivaluada de Kleene (fuerte) K_3 (ver capítulo 2 de este libro) no posee verdades lógicas. Por ende, ninguna fórmula cuya conectiva principal sea un condicional es válida en K_3. Esto es particularmente insatisfactorio porque una demanda razonable que podría imponerse sobre el condicional es que satisfaga el principio $A \rightarrow A$, que denominaremos aquí Principio de Identidad. Esto hace que, aunque

La l gica de la verdad.indd 187 04/07/2014 13:47:26

el predicado veritativo sea transparente en la teoría de Kripke, no toda instancia del Esquema T sea una verdad lógica. En particular, es fácil ver que la teoría no declara verdadera la equivalencia entre M y Tr'M', donde M es la oración del Mentiroso. Y en general, para cualquier oración A del lenguaje, si el valor de A es ½, entonces el valor de la equivalencia entre Tr'A' y A será también ½.

La falla de Identidad y la falla del Principio de Tercero Excluido son dos caras de la misma moneda. Nótese que, por cómo está definida la disyunción en K_3 y por el hecho de que $A \supset B$ (usaremos $\supset$ como el condicional material y $\rightarrow$ como el condicional de Field) es igual por definición a $\neg A \vee B$, la falla de $A \vee \neg A$ implica la falla de $A \supset A$. Otra manera de ver la cuestión es la siguiente. Sea C la oración de Curry, es decir, sea C una oración de la forma $Tr'C' \supset 2 \neq 2$. Por la semántica de K_3, se ve que C no es otra cosa que $\neg Tr'C' \vee 2 \neq 2$, y que el valor de esta oración en esta semántica es ½. En otros términos, la oración C es una versión disyuntiva de la oración del Mentiroso. No hay, entonces, ninguna diferencia sustantiva entre la oración del Mentiroso y la oración de Curry en la teoría de Kripke,[85] y la razón por la cual esto es así es, precisamente, que esta teoría carece de un condicional serio.

Con respecto a (ii), esto es, a la falta de medios expresivos para caracterizar las oraciones que no son ni verdaderas ni falsas, el problema es que el aparato semántico de la teoría kripkeana indica que ciertas oraciones no son ni verdaderas ni falsas, pero este hecho no puede expresarse con verdad en el lenguaje de la teoría. Por ejemplo, el modo más obvio de expresar que M no es ni verdadera ni falsa es por medio de la oración $\neg Tr'M' \wedge \neg Tr'\neg M'$. Pero esta oración recibe el valor ½. La dificultad no se soluciona si agregamos un nuevo operador específicamente diseñado para expresar la idea de *no ser ni verdadero ni falso,* al menos en K_3. La razón es que la adición de un operador de este tipo genera inmediatamente una inconsistencia. Sea *v* una función que le asigna un valor veritativo a las fórmulas del lenguaje y sea U un operador de *no ser ni verdadero ni falso* (UA puede interpretarse como "A es patológica" o como "A es indeterminada" o como "A es infundada", las diferencias no importan demasiado en este punto) definido del siguiente modo:

85. Un paraconsistente podría sugerir que sigue habiendo una diferencia sustantiva, ya que abandonar EFSQ es suficiente para bloquear la Paradoja del Mentiroso pero no la de Curry (ver el capítulo 5 del presente volúmen).

La l gica de la verdad.indd 188 04/07/2014 13:47:26

$$v(\mathbf{U}A) = \begin{cases} 1 & \text{si } v(A) = \tfrac{1}{2} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Si U forma parte del lenguaje, entonces es posible construir una oración R que expresa ¬Tr'R' ∨ UTr'R'. No es difícil mostrar que no existe una asignación estable de valores de verdad para la oración R.

Para resolver este asunto, Field apela a un nuevo operador: el operador de determinación. Este operador puede definirse de un modo más o menos natural a partir del condicional de la teoría y es posible mostrar que dicho operador no genera revanchas. Una vez que tenemos el operador de determinación, es posible clasificar la oración del Mentiroso y demás oraciones problemáticas como ni verdaderas ni falsas. Simplemente definimos la noción de patologicidad en términos de no ser determinadamente verdadero ni ser determinadamente falso.

Este capítulo está organizado del modo siguiente. Las secciones 2 a 5 se encargan del problema (i), mientras que la sección 6 se ocupa del problema (ii). En la sección 2 presentamos el condicional de Field y mencionamos algunos hechos relevantes vinculados al comportamiento de oraciones condicionales. En la sección 3 daremos una versión alternativa de la teoría en la cual el condicional se interpreta utilizando una semántica de vecindades. En la sección 4 exploramos una variación de la teoría de Field presentada por Stephen Yablo en la cual el condicional no sufre de ciertos problemas atribuidos al condicional de Field. En la sección 5 presentamos una versión más sofisticada de la teoría de Field. La sección 6 explica cómo es posible utilizar el condicional para construir un operador de determinación que puede utilizarse para solucionar revanchas. La sección 7 analiza ciertas objeciones que se le han hecho a la teoría de Field junto con algunos intentos de respuesta. La sección 8 contiene nuestras observaciones finales. El capítulo también incluye un apéndice en el cual analizamos con cierto detalle qué tan adecuado es el condicional presentado por Field y en particular qué principios clásicos respetados por el condicional material se pierden.

La l gica de la verdad.indd 189 04/07/2014 13:47:26

2. Combinar secuencias de revisión con puntos fijos

Sea *L* un lenguaje de primer orden que contiene nombres para cada una de sus expresiones (incluyendo términos y fórmulas). Asumiremos que tenemos alguna forma apropiada de codificar las expresiones de *L* y utilizaremos comillas simples como mecanismo de generación de nombres para las expresiones de *L*. De este modo, diremos que 'e' denota (el código de) la expresión e (bajo la codificación escogida). Sea L^+ el resultado de agregar a *L* un predicado monádico Tr(x) y una conectiva diádica →.

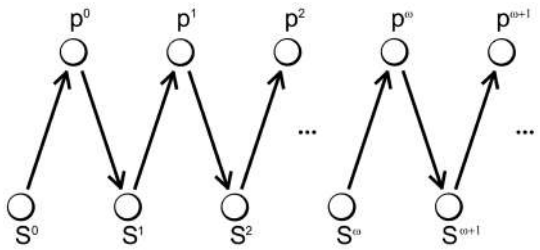
La ingeniosa estrategia de Field para darle una interpretación a todas las fórmulas de L^+ consiste en combinar las técnicas kripkeanas que apelan a la idea de que la verdad es un punto fijo con la técnica utilizada por los defensores de la Teoría de la Revisión que posibilita interpretar el predicado veritativo por medio de secuencias de revisión. Dos diferencias relevantes, sin embargo, son las siguientes. En primer término, en lugar de utilizar secuencias de revisión para interpretar el predicado veritativo, Field las utiliza para construir un condicional que sea razonable (i.e. el predicado veritativo sigue siendo un punto fijo). En segundo lugar, las secuencias de revisión para los condicionales se construyen sobre la base de una semántica con tres valores de verdad (1, ½, 0),[86] en lugar de dos.

En términos generales, la idea consiste en construir dos secuencias, una secuencia de valuaciones para condicionales y una secuencia de puntos fijos para las demás expresiones del lenguaje. La primera secuencia parte de la valuación que le asigna ½ a todos los condicionales. La segunda parte del punto fijo mínimo de Kripke. Para obtener los restantes miembros de la secuencia de valuaciones para condicionales aplicamos una regla de revisión que le asigna el valor 1 al condicional A → B si a partir de algún punto de la secuencia *de puntos fijos* el valor de A es menor o igual al valor de B. Por otra parte, para obtener cada miembro de la secuencia de puntos fijos aplicamos las cláusulas de K_3 junto con el hecho de que Tr es transparente. El *valor último* de una fórmula A de L^+, esto es, el valor semántico que finalmente adquiere la fórmula en la semántica que estamos presentando, está dado por los puntos fijos kripkeanos. Para determinar el valor último de A es necesario indicar en qué valor se estabiliza (si es que en alguno).

86. En realidad, la semántica de Field también puede construirse sobre la base de un espacio infinito de valores.

La l gica de la verdad.indd 190 04/07/2014 13:47:26

Utilizaremos la letra P para designar las valuaciones que son puntos fijos y la letra S para designar las valuaciones para los nuevos condicionales. Una forma de graficar lo que hemos venido explicando hasta ahora es la siguiente:



Fuente: Yablo (2003)

Estipulamos que en la valuación S^0 el valor de $A \rightarrow B$ es ½ para cualquier A y cualquier B de L^+, y que P^0 es el punto fijo mínimo de Kripke.[87] Esta combinación de revisión y puntos fijos involucra tres procedimientos distintos. El primero es el que nos permite pasar de cada S^α a P^α. El segundo es el que nos permite construir cada S^α a partir de P^βs previos. Aquí es relevante qué tipo de ordinal es α. Tendremos instrucciones distintas para ordinales sucesores y ordinales límite. Por último, es necesario establecer cómo este proceso determina los valores semánticos de las fórmulas, lo que antes llamamos *valor último*.

Comenzaré por lo primero. Las valuaciones (tanto S^α y P^α) son funciones que le asignan un valor semántico a las fórmulas del lenguaje. En particular las valuaciones de la forma P^α satisfacen las condiciones dadas por K_3 y por el hecho de que es posible agregar consistentemente un predicado veritativo transparente a K_3.

Definición 4.1 (Valuación Kleene-Kripke)

Diremos que una función valuación P^α relativa a un ordinal α es *Kleene-Kripke* si y sólo si satisface las siguientes condiciones:

$P^\alpha(\neg A) = 1 - P^\alpha(A)$

87. Desde un punto de vista técnico, nada nos impide estipular que $\mathbf{P^0}$ es algún punto fijo distinto del mínimo. Sin embargo, nos resulta difícil ver qué razones conceptuales habría para hacerlo.

La l gica de la verdad.indd 191 04/07/2014 13:47:29

$P^{\alpha}(A \vee B) = max(P^{\alpha}(A), P^{\alpha}(B))$[88]

$P^{\alpha}(Tr'A') = P^{\alpha}(A)$[89]

Entonces, para pasar de S^{α} a P^{α} calculamos los valores de las fórmulas utilizando las cláusulas de arriba.[90]

En cuanto a la construcción de cada S^{α} a partir de P^{β}s previos, la idea es tener distintas cláusulas para distintos tipos de ordinales.

Definición 4.2 (Valuación para condicionales)

Si α es un ordinal sucesor $\beta+1$, entonces

$$S^{\beta+1}(A \rightarrow B) = \begin{cases} 1 & \text{si } P^{\beta}(A) \leq P^{\beta}(B) \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Si α es un ordinal límite λ, entonces

$$S^{\lambda}(A \rightarrow B) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\exists\gamma<\lambda)(\forall\beta\in[\gamma,\lambda))(P^{\beta}(A) \leq P^{\beta}(B)) \\ 0 & \text{si } (\exists\gamma<\lambda)(\forall\beta\in[\gamma,\lambda))(P^{\beta}(A) > P^{\beta}(B)) \\ 1/2 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

En términos informales, cuando evaluamos un condicional desde un ordinal sucesor $S^{\beta+1}$, consideramos únicamente los valores del antecedente y el consecuente en el punto fijo inmediatamente anterior P^{β}. En cambio, cuando evaluamos un condicional desde un ordinal límite S^{λ}, es necesario constatar los valores del antecedente y del consecuente en un conjunto infinito de ordinales

88. Donde *max*(x, y) es una función que da el máximo entre x e y.

89. Para no complicar más las cosas, no daremos las cláusulas para el fragmento cuantificacional del lenguaje. Asumiremos además que el resto de las conectivas veritativo funcionales son definibles a partir de la negación y la disyunción.

90. Así como es posible comenzar la construcción usando un punto fijo kripkeano distinto del mínimo, también es posible (en el sentido de que no habrían razones técnicas para no hacerlo) utilizar otros esquemas de valuación distintos de K_3 para pasar de S^{α} a P^{α} (por supuesto, nos referimos a otros esquemas de valuación que den lugar a puntos fijos).

La l gica de la verdad.indd 192 04/07/2014 13:47:29

previos. En particular, si a partir de algún ordinal γ se da que en todos los ordinales β mayores a γ tenemos $P^{\beta}(A) \leq P^{\beta}(B)$, entonces el valor del condicional será 1. En cambio, si a partir de algún ordinal γ se da que en todos los ordinales β mayores a γ tenemos $P^{\beta}(A) > P^{\beta}(B)$, entonces el valor del condicional será 0. En cualquier otro caso, el valor del condicional será ½.

Será útil en este punto considerar algunos ejemplos.

Ejemplo 4.3 (Una verdad aritmética)

Consideremos la oración $2 = 2 \rightarrow (2 = 2 \rightarrow 2 = 2)$.[91] Obviamente su valor en S^0 es ½. Como 1 es un ordinal sucesor y la fórmula es un condicional, para determinar su valor en S^1 tenemos que determinar el valor de su antecedente $2 = 2$ y su consecuente $2 = 2 \rightarrow 2 = 2$ en P^0. Tenemos $P^0(2 = 2) = 1$ y $P^0(2 = 2 \rightarrow 2 = 2) = ½$, con lo cual $P^0(2 = 2) > P^0(2 = 2 \rightarrow 2 = 2)$, por tanto $S^1(2 = 2 \rightarrow (2 = 2 \rightarrow 2 = 2)) = 0$. Pero dado que $P^0(2 = 2) = 1$, $S^1(2 = 2 \rightarrow 2 = 2) = 1$. Con lo cual, vamos a tener $P^1(2 = 2 \rightarrow 2 = 2) = 1$ y $P^1(2 = 2) = 1$. Por ende $P^1(2 = 2) = P^1(2 = 2 \rightarrow 2 = 2) = 1$, lo cual nos da por la regla de revisión para ordinales sucesores que $S^2(2 = 2 \rightarrow (2 = 2 \rightarrow 2 = 2)) = 1$. Está claro también que para todo ordinal $\alpha > 1$, $P^{\alpha}(2 = 2) = P^{\alpha}(2 = 2 \rightarrow 2 = 2) = 1$, de lo cual se sigue que en ω (el primer ordinal límite), tenemos $S^{\omega}(2 = 2 \rightarrow (2 = 2 \rightarrow 2 = 2)) = 1$.

Ejemplo 4.4 (el Mentiroso y Curry)

Veamos ahora que ocurre con las paradojas semánticas usuales. La oración del Mentiroso no genera ningún problema, ya que adquiere el valor ½ en el punto fijo mínimo P^0 y mantiene ese valor a lo largo de toda la secuencia de valuaciones. El tratamiento de la oración de Curry es diferente. Sea C la oración $\mathrm{Tr}\text{`}C\text{'} \rightarrow 2 \neq 2$. Por estipulación, al ser C un condicional, $S^0(C) = ½$. Dado que $P^0$ es un punto fijo, se sigue que $P^0(C) = P^0(\mathrm{Tr}\text{`}C\text{'}) = ½$. Además, dado que P^0 es el punto fijo mínimo kripkeano, sabemos que $P^0(2 \neq 2) = 0$. En virtud de que $P^0(\mathrm{Tr}\text{`}C\text{'}) > P^0(2 \neq 2)$, por la cláusula del condicional para ordinales sucesores, $S^1(\mathrm{Tr}\text{`}C\text{'} \rightarrow 2 \neq 2) = 0$. Esta valuación pasa a P^1, donde tenemos $P^1(C) = P^1(\mathrm{Tr}\text{`}C\text{'}) = 0 =$

91. Asumiremos por el momento que *L* es un lenguaje que incluye al lenguaje de la aritmética y que en dicho lenguaje contamos con numerales para denotar números.

La l gica de la verdad.indd 193 04/07/2014 13:47:29

$P^1(2 \neq 2)$. Por lo tanto, $S^2(Tr'C' \rightarrow 2 \neq 2) = 1$. En P^2, tenemos $P^2(C) = P^2(Tr'C') = 1$, pero $P^2(2 \neq 2) = 0$, con lo cual $S^3(Tr'C' \rightarrow 2 \neq 2) = 0$. La evaluación continúa de manera similar en el resto de la secuencia de ordinales. La fórmula C varía entre 1 y 0 en todos los ordinales sucesores y adquiere valor ½ en todos los ordinales límite.

Aun no hemos indicado de qué modo esta construcción nos da valores semánticos para las oraciones del lenguaje. Nótese que no estamos en condiciones de utilizar un argumento "tipo-Kripke" donde se apela a la idea de que la cardinalidad del lenguaje es menor que la cardinalidad del conjunto de todos los ordinales para mostrar que la extensión del predicado veritativo eventualmente se estabiliza. Esto se debe a que los puntos fijos generados por la secuencia de revisión no son monótonos. El caso de la oración de Curry, que se alterna entre 1 y 0 en los ordinales sucesores y adopta el valor ½ en todos los ordinales límite, es suficiente para hacer patente la falta de monotonía. En consecuencia, en lugar de apelar a la idea de punto fijo para definir el valor último de una fórmula, Field apela a otra noción proveniente de la teoría de la revisión, la noción de *estabilidad*. Intuitivamente, si el valor de una fórmula A en los puntos fijos kripkeanos es eventualmente siempre 1, es decir, si se estabiliza en 1, entonces el valor último de A es 1. Si, por otra parte, el valor de A se estabiliza en 0, el valor último de A es 0. Y si se estabiliza en ½ o si fluctúa entre dos o tres[92] de los anteriores valores, es decir, si es inestable, entonces su valor último es ½. En términos más formales definamos el valor último de una oración A, que denotaremos |A|, de la siguiente forma:

Definición 4.5 (Valor último)

$$|A| = \begin{cases} \text{Limite}_{\alpha} P^{\alpha}(A) & \text{si el límite existe} \\ 1/2 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

92. Aunque nótese que ninguna oración puede fluctuar para siempre entre 1 y 0, dado que si así lo hiciera hasta el ordinal límite λ., en λ adquiriría valor ½.

La l gica de la verdad.indd 194 04/07/2014 13:47:29

La noción de validez queda definida a partir del concepto de valor último. Una fórmula A es válida si y sólo si su valor último es un valor designado, donde el único valor designado es 1. A su vez, una inferencia de A a partir de Γ es válida si y sólo si preserva el valor designado (en notación, $\Gamma \vDash A$).

Ya hemos visto que la oración de Curry C varía entre 1 y 0 en todos los ordinales sucesores (más precisamente tiene 0 en ordinales sucesores impares y 1 en ordinales sucesores pares) y adquiere valor ½ en todos los ordinales límite. De esto se sigue que $|C| = ½$. Este es el diagnóstico correcto para la oración de Curry, ya que intuitivamente no es ni verdadera ni falsa. La oración del Mentiroso M y la oración del Honesto H adquieren el valor ½ en el punto fijo mínimo kripkeano P^0 y mantienen ese valor a lo largo de toda la secuencia de revisión. Por lo tanto, tenemos $|C| = |M| = |H| = ½$.

Además de lidiar apropiadamente con Curry y las demás paradojas, la secuencia de revisión presentada por Field tiene algunas propiedades interesantes que vale la pena mencionar. Field prueba lo que él llama el *Teorema Fundamental*, según el cual existen ordinales, que denomina *ordinales aceptables*, donde cada fórmula del lenguaje adquiere su valor último. En realidad, el Teorema Fundamental establece algo más fuerte, que consignamos a continuación.

Teorema 4.6 (Teorema Fundamental)

Para cualquier ordinal α hay ordinales $\beta > \alpha$ tal que para cada fórmula A de L^+, $P^\beta(A) = |A|$.

Reproducir la prueba de este hecho ocuparía más espacio del que disponemos aquí,[93] pero es importante notar que este teorema nos da las herramientas para establecer, para cualquier argumento que involucre el condicional, si el argumento es válido o no lo es (y lo mismo para cualquier fórmula).

Por ejemplo, el Teorema Fundamental nos asegura, entre otras cosas, la validez de la regla *Modus Ponens* y de la regla de Razonamiento por Casos.

93. El lector interesado puede ver Field (2008: 257-258).

La l gica de la verdad.indd 195 04/07/2014 13:47:29

Ejemplo 4.7 (Modus Ponens)

Consideremos cualquier inferencia de la forma Modus Ponens. Si suponemos que $|A| = 1$ y $|A \to B| = 1$, entonces por el Teorema Fundamental hay cierto ordinal β tal que para todo $\alpha \geq \beta$, $P^{\alpha}(A) = 1$ y hay cierto ordinal γ tal que para todo $\alpha \geq \gamma$, $P^{\alpha}(A \to B) = 1$. Supongamos (sin perder generalidad) que $\beta > \gamma$. Luego, está claro que $P^{\beta}(A \to B) = P^{\beta+1}(A \to B) = 1$, y esto implica que $S^{\beta+1}(A \to B) = 1$. Pero esto sólo puede ocurrir si $P^{\beta}(A) \leq P^{\beta}(B)$. Y dado que $P^{\beta}(A) = 1$, tenemos que $P^{\beta}(B) = 1$. A su vez, para todo $\alpha \geq \beta$, $P^{\alpha}(B) = 1$. Por la definición de valor último podemos concluir que $|B| = 1$. Luego, Modus Ponens preserva el valor designado.

Ejemplo 4.8 (Razonamiento por Casos)

Nótese que una disyunción $A \vee B$ podría tener valor último 1 simplemente por el hecho de que en cada ordinal alguno de sus disyuntos tiene valor 1 (mientras que el otro tiene un valor distinto). Es decir, no es inmediato que dado $|A \vee B| = 1$ se pueda inferir que $|A| = 1$ o $|B| = 1$. Pero si $|A| \neq 1$ y $|B| \neq 1$, entonces $A \vDash 2 \neq 2$ y $B \vDash 2 \neq 2$. Dado que además tenemos $\vDash A \vee B$ y $\nvDash 2 \neq 2$, estaríamos dando un contraejemplo a la regla de Razonamiento por Casos. Sin embargo, el Teorema Fundamental nos asegura que $|A \vee B| = 1$ sólo si hay un ordinal aceptable α tal que $P^{\alpha}(A \vee B) = 1$. Como P^{α} es un punto fijo kripkeano, tenemos $P^{\alpha}(A) = 1$ o $P^{\alpha}(B) = 1$. Como α es un ordinal aceptable, de esto último se sigue que $|A| = 1$ o $|B| = 1$.

Dos virtudes fundamentales de la teoría de Field que no hemos mencionado y que ahora estamos en condiciones de considerar apropiadamente es que valida por completo el Esquema T, y que valida el Principio de Intersustitutividad de Equivalentes.

Teorema 4.9 (Esquema T)

Para toda fórmula A de L^{+} se cumple que $|\mathrm{Tr}\ulcorner A \urcorner \leftrightarrow A| = 1$.

La l gica de la verdad.indd 196 04/07/2014 13:47:29

Prueba: Este hecho es inmediato dado que $|A \rightarrow A| = 1$ para toda fórmula A y que el predicado veritativo es transparente.

Teorema 4.10 (Principio de Intersubstitutividad de Equivalentes)

Si A_1 y A_2 son fórmulas de L^+ con las mismas variables libres, $B(A_1)$ es una fórmula que tiene a A_1 como subfórmula, $B(A_2)$ es la fórmula que resulta de reemplazar una o más ocurrencias de A_1 en B por A_2, y para toda asignación de objetos a las variables libres se da que $|A_1 \leftrightarrow A_2| = 1$, entonces se cumple que $|B(A_1) \leftrightarrow B(A_2)| = 1$.

Prueba: Por inducción sobre la complejidad de las fórmulas (ver la parte de ejercicios).

Una virtud de la teoría de Field es que los condicionales se comportan bien (de hecho, de manera casi composicional) cuando consideramos los valores últimos de sus componentes.

Teorema 4.11 (Semi-composicionalidad del condicional)

Sean A y B fórmulas de L^+. Tenemos los siguientes hechos:

(1) si $|A| = 0$ o $|B| = 1$, se sigue que $|A \rightarrow B| = 1$,

(2) si $|A| = 1$ y $|B| = 0$, entonces $|A \rightarrow B| = 0$.

(3) Si $|A| = 1$ y $|B| = ½$, o si $|A| = ½$ y $|B| = 0$, entonces $|A \rightarrow B| = ½$ o $|A \rightarrow B| = 0$.

(4) Si $|A| = |B| = ½$, entonces $|A \rightarrow B|$ puede ser 1 o ½.

Esbozo de prueba: (1) y (2) son inmediatos. Con respecto a (4), si asumimos que $|A| = |B| = ½$, entonces por el Teorema Fundamental sabemos que existen ordinales aceptables α arbitrariamente grandes tales que $P^\alpha(A) = P^\alpha(B)$. Por

La l gica de la verdad.indd 197 04/07/2014 13:47:29

ende, tenemos en ordinales $\alpha+1$ arbitrariamente grandes $P^{\alpha+1}(A \rightarrow B) = 1$, con lo cual $|A \rightarrow B| \neq 0$. La prueba para (3) es similar.

Otra virtud importante es que es posible construir un modelo para el lenguaje con el condicional y el predicado veritativo que es conservativo con respecto al modelo del lenguaje base. En particular, dado un modelo clásico *M* para el lenguaje base *L*, es posible construir un modelo M^+ para el lenguaje L^+ tal que M^+ asigna el mismo valor semántico que *M* a todas las fórmulas de *L* y $|\mathrm{Tr}\ulcorner A \urcorner| = |A|$.[94] Esto nos asegura que en contextos donde no hay paradojas semánticas involucradas podemos seguir razonando clásicamente. Es decir, puede probarse lo siguiente:

Teorema 4.12 (El condicional de Field y el condicional material)

Sean A y B formulas de L^+ tales que $|A \vee \neg A| = 1$ y $|B \vee \neg B| = 1$. Luego, tenemos $|(A \supset B) \leftrightarrow (A \rightarrow B)| = 1$.

Esbozo de prueba: Sólo mostraremos aquí que si $|A \vee \neg A| = 1$ y $|B \vee \neg B| = 1$, entonces $|(A \supset B) \rightarrow (A \rightarrow B)| = 1$. El lector interesado puede probar el otro lado del bicondicional. Lo primero es mostrar que se cumplen los siguientes hechos en la semántica:

(1) Si $|A| = 1$, entonces $|B \rightarrow A| = 1$.

(2) Si $|\neg A| = 1$, entonces $|A \rightarrow B| = 1$.

(3) Si se cumple que (si $|A_1| = 1$, entonces $|B| = 1$ y si $|A_2| = 1$, entonces $|B| = 1$), entonces si $|A_1 \vee A_2| = 1$, entonces $|B| = 1$.

(4) Si se cumple que (si $|A_1| = 1$, entonces $|A_2| = 1$ y si $|A_2| = 1$, entonces $|B| = 1$), entonces si $|A_1| = 1$, entonces $|B| = 1$.

(5) Si $|A \supset B| = 1$, entonces $|A \rightarrow B| = 1$.

94 Hemos modificado ligeramente la formulación de Field para simplificar las cosas. Ver su (2008, p. 263) para la forma completa del teorema.

La l gica de la verdad.indd 198 04/07/2014 13:47:29

Esta tarea es un tanto tediosa, así que la relegamos a la parte de ejercicios. Una vez que contamos con (1)-(5), razonamos del siguiente modo.

Si $|A \to B| = 1$, entonces $|(A \supset B) \to (A \to B)| = 1$ por (1)

Si $|A \supset B| = 1$, entonces $|A \to B| = 1$ por (5)

Si $|A \supset B| = 1$, entonces $|(A \supset B) \to (A \to B)| = 1$ por (4)

Si $|A \wedge \neg B| = 1$, entonces $|\neg(A \supset B)| = 1$ por K_3

Si $|\neg(A \supset B)| = 1$, entonces $|(A \supset B) \to (A \to B)| = 1$ por (2)

Si $|A\wedge \neg B| = 1$, entonces $|(A \supset B) \to (A \to B)| = 1$ por (4)

Si $|(A \wedge \neg B) \vee (A \supset B)| = 1$, entonces $|(A \supset B) \to (A \to B)| = 1$ por (3)

Si $|(A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B)| = 1$, entonces $|(A \wedge \neg B) \vee (A \supset B)| = 1$ por K_3

Si $|(A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B)| = 1$, entonces $|(A \supset B) \to (A \to B)| = 1$ por (4)

Este importante resultado implica que el condicional → coincide con el condicional material si nos los restringimos a fórmulas que respetan la Ley de Tercero Excluido. Esto desactiva, por ejemplo, cualquier tipo de crítica que señale que el abandono de la Ley de Tercero Excluido es incompatible con la actividad matemática o la actividad científica en general. Lo que el Teorema 2.11 implica es que si A y B son fórmulas de *L*, entonces $|A \to B| = |A \supset B|$. En otras palabras, podemos seguir razonando clásicamente en matemática y en cualquier otro ámbito donde no aparezcan paradojas.

Ejercicios para la sección 2

[1] Pruebe que el Principio de Intersustitutividad de Equivalentes vale.

[2] Piense qué ocurriría con la teoría de Field si P^0 fuera el punto fijo maximal que hace verdadera a la oración del Honesto.

[3] Suponga que S^0 asigna 1 a todos los condicionales en lugar de asignarles ½. Encuentre una fórmula A de L^+ tal que su valor último se modifique con esta estipulación.

La l gica de la verdad.indd 199 04/07/2014 13:47:29

[4] Supongamos que definimos un operador de patologicidad o indeterminación utilizando secuencias de revisión del siguiente modo:

$$S^{\beta+1}(UA) = \begin{cases} 1 & \text{si } P^{\beta}(A) = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Si α es un ordinal límite λ, entonces

$$S^{\lambda}(UA) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\exists\gamma<\lambda)(\forall\beta\in[\gamma,\lambda))(P^{\beta}(A)=0) \vee (\exists\gamma<\lambda)(\forall\beta\in[\gamma,\lambda))(P^{\beta}(A)=1) \\ 1 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Determine cuál es el valor último de las siguientes oraciones bajo esta definición:

[4.1] UM

[4.2] R

[4.3] A, donde A es UTr‘ A’

[4.4] B, donde B es ¬UTr‘ B`

[4.5] U^nM para cualquier $n > 1$ (donde U^nM es el resultado de aplicar n veces el operador U).

[5] Use el Teorema Fundamental para mostrar que el hecho (3) del Teorema 4.11 se cumple.

[6] Pruebe los hechos (1)-(5) del Teorema 4.12

3. La semántica de vecindades

En esta breve sección ofreceremos una presentación alternativa de la teoría paracompleta de Field (2008: 264-66).[95] Hay dos razones para hacer esto. En

95. Field presenta también una versión algebraica de la semántica. Por razones de espacio, omitiremos esa presentación aquí. La principal virtud de la presentación algebraica es que permite generalizar de manera relativamente sencilla el esquema trivaluado a un esquema con infinitos valores de verdad. El lector interesado puede ver su Field (2008: 259-262).

La l gica de la verdad.indd 200 04/07/2014 13:47:30

primer lugar, los lectores familiarizados con la semántica de mundos posibles para la lógica modal alética y otras lógicas modales seguramente encontrarán esta versión de la teoría más natural que la versión que apela a secuencias de revisión. En segundo lugar, al dar una semántica de mundos posibles se facilita la comparación con ciertas teorías paraconsistentes como las que aparecerán en el siguiente capítulo, dado que estas teorías suelen presentarse utilizando ese tipo de semántica. En esta sección, entonces, en lugar de utilizar secuencias de revisión para interpretar los condicionales, la idea es proporcionar una semántica de mundos posibles en la cual juega un papel fundamental la idea de vecindad (*neighborhood*).

El modelo formal queda especificado del modo siguiente.

Definición 4.13 (Modelo)

Un modelo M para el lenguaje L^+ es una terna $\langle \mathbf{W}, \mathbf{V}, @ \rangle$, donde $\mathbf{W}$ es un conjunto no vacío de mundos, $\mathbf{V} = \{1, 0, ½\}$ es el conjunto de valores semánticos, y $@$ es un elemento distinguido de $\mathbf{W}$.[96]

Para mostrar de qué modo se interpreta el condicional necesitamos las nociones adicionales de Familia Dirigida, Mundo Normal y Mundo Solitario.

Definición 4.14 (Familia Dirigida)

Sea $\mathbf{F}_w$ un conjunto cuyos miembros son conjuntos no vacíos pertenecientes al conjunto potencia de $\mathbf{W}$, que denotaremos $\mathbf{P}(\mathbb{W})$. Una familia de conjuntos de $\mathbf{F}_w$ está *dirigida* si y sólo si para cualesquiera dos conjuntos en $\mathbf{F}_w$ existe un conjunto también en $\mathbf{F}_w$ (no necesariamente distinto) que está incluido en la intersección de los dos primeros. En términos más rigurosos: una familia de conjuntos de $\mathbf{F}_w$ está *dirigida* si y sólo si $(\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbf{F}_w)\ (\exists \mathbf{Z} \in \mathbf{F}_w)\ \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$.[97]

96. Intuitivamente, podemos pensar que @ es el mundo actual.

97. Nótese que el hecho de que $\mathbf{F}_w$ esté dirigida no excluye la posibilidad de que haya incomparabilidad entre conjuntos, esto es, hay conjuntos dirigidos $\mathbf{F}_w$ que no están ordenados por inclusión, aunque obviamente la conversa vale: todo conjunto $\mathbf{F}_w$ ordenado por inclusión está dirigido. El 4.18 es un ejemplo de un conjunto dirigido que no está ordenado por inclusión.

La l gica de la verdad.indd 201 04/07/2014 13:47:30

Definición 4.15 (Mundo Normal, Anormal, Solitario y Feliz)

Para todo mundo $w \in W$, decimos que w es *normal* si y sólo si $w \in X$ para todo $X \in F_w$. También decimos que w es *solitario* si y sólo si $\{w\} \in F_w$. Por otra parte, decimos que w es *anormal* si y sólo si no es normal, y que w es *feliz* si y sólo si no es solitario.

Estipulamos que a cada $w \in W$ se le asigna una familia dirigida F_w (posiblemente vacía) cuyos miembros son conjuntos no vacíos pertenecientes al conjunto potencia de W, que denotaremos $P(W)$. Asumimos también que el mundo actual @ es normal y feliz en toda interpretación. Con respecto al condicional, tenemos la siguiente cláusula:

Definición 4.16 (El condicional)

$$v_w(A \rightarrow B) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\exists X \in F_w)(\forall w' \in X)(v_{w'}(A) \leq v_{w'}(B)) \\ 0 & \text{si } (\exists X \in F_w)(\forall w' \in X)(v_{w'}(A) > v_{w'}(B)) \\ 1/2 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Aquí F_w está dirigido. Nótese que la direccionalidad de F_w es lo que garantiza que esta caracterización del condicional sea apropiada. Pues si F_w no estuviera dirigido podría suceder que $(\exists X \in F_w)\ (\forall w' \in X)\ (v_{w'}(A) \leq \in v_{w'}(B))$ y simultáneamente que $(\exists X \in F_w)\ (\forall w' \in X)\ (v_{w'}(A) > \in v_{w'}(B))$. Será útil ver un ejemplo concreto.

Ejemplo 4.17 (Una familia no dirigida)

Digamos que $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$, y que $F_{w2} = \{\{w_1, w_2\}, \{w_2, w_3, w_4\}, \{w_1, w_4, w_5, w_6\}, \{w_1, w_3\}\}$. Está claro que la familia de conjuntos F_{w2} no está dirigida, ya que por ejemplo no existe ningún conjunto Z en F_{w2} tal que Z esté incluido en la intersección de $\{w_1, w_2\}$ con $\{w_1, w_3\}$. En términos un poco más formales, $(\neg \exists Z \in F_{w2})\ Z \subseteq \{w_1, w_2\} \cap \{w_1, w_3\}$.

La l gica de la verdad.indd 202 04/07/2014 13:47:30

Ejemplo 4.18 (Una familia dirigida no ordenada por inclusión)

Sea $\mathbb{W}$ igual que antes y sea $F_{w2} = \{\{w_1, w_2\}, \{w_1, w_2, w_3\}, \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}, \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_6\}\}$. Este conjunto sí está dirigido (aunque no está ordenado por inclusión, ya que ninguno de los últimos dos miembros incluye al otro). Además w_2 es un mundo normal y feliz, de acuerdo a las definiciones presentadas más arriba. Ahora supongamos que $v_{w2}(A_2) = v_{w4}(A_2) = 1$, $v_{w1}(A_1) = v_{w2}(A_1) = v_{w3}(A_1) = v_{w2}(B) = v_{w1}(A_2) = v_{w3}(A_2) = ½$, y $v_{w4}(A_1) = v_{w1}(B) = v_{w3}(B) = v_{w4}(B) = 0$. Dadas estas valuaciones relativas a mundos para A_1, A_2, y B, tenemos lo siguiente: $v_{w2}(A_1 \rightarrow A_2) = 1$ ya que en cada mundo de $\{w_1, w_2, w_3\}$ el valor de A_1 es menor o igual que el valor de A_2, y $v_{w2}(A_2 \rightarrow B) = 0$ ya que en cada mundo de $\{w_1, w_2, w_3\}$ el valor de A_2 es estrictamente mayor que el valor de B. Por otra parte, podemos inferir que $v_{w2}(A_1 \rightarrow B) = ½$, ya que en w_1 el valor de A_1 es mayor que el valor de B pero en w_2 el valor de A_1 es igual al valor de B. Dado que tanto w_1 como w_2 están en todos los conjuntos miembros de F_{w2}´, esto es suficiente para que el valor del condicional no sea 1 ni 0.

Podemos definir la noción de validez utilizando el hecho de que hay un mundo actual del siguiente modo:

Definición 4.19 (Validez)

Una fórmula A de L^+ está *actualmente verificada* en un modelo M si y sólo si $v_@(A) = 1$ en M.

$\vDash A$ si y sólo si todo modelo verifica actualmente A.

$\Sigma \vDash A$ si y sólo si todo modelo que verifica actualmente Σ también verifica actualmente A.

Para ilustrar el funcionamiento de la semántica, mostraré que cualquier inferencia de la forma *Modus Ponens* es válida.

Ejemplo 4.20 (Modus Ponens)

Supongamos que $@ \vDash A$ y que $@ \vDash A \rightarrow B$. Esto quiere decir que $v_@(A) = 1$ y $v_@(A \rightarrow B) = 1$. Por lo segundo y la cláusula del condicional, sabemos que ($\exists X \in$

La l gica de la verdad.indd 203 04/07/2014 13:47:30

$F_@$) $(\forall w' \in X)$ ($v_{w'}(A) \leq v_{w'}(B)$). Como @ es normal, $@ \in X$. En consecuencia $v_@(A) \leq v_@(B)$. Pero de esto junto con el hecho de que $v_@(A) = 1$ se sigue que $v_@(B) = 1$. Por lo tanto, *Modus Ponens* es válido.

Ejercicios para la sección 3

[1] Pruebe los siguientes hechos utilizando la semántica de vecindades:

[1.1] $\vDash A \rightarrow A$ [1.2] $B \vDash A \rightarrow B$

[1.3] $A \rightarrow (A \rightarrow B) \nvDash A \rightarrow B$[98] [1.4] $\nvDash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$

[1.5] $\nvDash (A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$

[2] Explique por qué la definición del condicional para un mundo w sería inapropiada si pudiese ocurrir que $\emptyset \in F_w$.

4. Una variación de Yablo

Siguiendo a Stephen Yablo (2003), indicaremos tres problemas que afectan la teoría de Field. El primero de ellos es el *problema de la arbitrariedad*. La teoría le asigna 1 (0) de manera arbitraria a ciertas oraciones que bien podrían tener el valor 0 (1). Por ejemplo, la oración que podríamos llamar "Honesto condicional", esto es una oración H_2 que expresa $(A \rightarrow A) \rightarrow Tr(\ulcorner H_2 \urcorner)$ recibe el valor 1.[99] El segundo es el *problema de la infundación*. La teoría le asigna 1 a ciertas oraciones infundadas. Pensemos en una secuencia de condicionales tales que para cada n, A_n es $Tr(\ulcorner A_n \urcorner) \rightarrow Tr(\ulcorner A_{n+1} \urcorner)$. Cada condicional A_n es ½ en S_0. En S_1, cada A_n es 1, porque

98. Sugerencia: asuma que A es una oración de la forma $T(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow 2 \neq 2$.

99. El problema no se reduce simplemente al hecho de que el Honesto Condicional tiene valor 1 cuando en realidad no debería tenerlo. Hay otra versión del Honesto Condicional, no muy distinta de la primera, que recibe el valor 0. Sea H_3 la oración $2 = 2 \rightarrow Tr(\ulcorner H_3 \urcorner)$. Uno esperaría que estas dos oraciones reciban el mismo valor o al menos que hubiera una explicación razonable de por qué no lo reciben.

La l gica de la verdad.indd 204 04/07/2014 13:47:30

$P_0(A_n) = P_0(Tr'A_n') = P_0(Tr'A_{n+1}') = P_0(A_{n+1}) = ½$. En las siguientes etapas de la secuencia, el valor de los condicionales permanece en 1. El tercero es el *problema de la estrechez del condicional*. El condicional de la teoría no es suficientemente estricto. El precio a pagar por validar todas las instancias del Esquema T es que ciertos bicondicionales indeseables también se validan. Por ejemplo, la teoría le asigna el valor 1 a $M \leftrightarrow \neg M$, $H \leftrightarrow \neg H$, $M \leftrightarrow \neg H$ y $\neg M \leftrightarrow H$.

Para solucionar estos problemas, Yablo ofrece su propia teoría. Aunque la teoría de Yablo utiliza un esquema de valuación tetravalente, aquí adaptaremos su propuesta a un enfoque trivalente para facilitar la comparación con la teoría de Field. Supondremos que *R* es un conjunto de puntos fijos de Kripke *transparentes* (un punto fijo R es transparente si y sólo si en cada sustitución de A por Tr'A' en R siempre preserva valor de verdad en R). Los miembros R de *R* forman un orden parcial coherente completo[100] bajo las operaciones usuales ($\wedge$, $\vee$, $\neg$). La idea de Yablo es construir una secuencia creciente de puntos fijos P^α en tándem con una secuencia decreciente de *conjuntos* de puntos fijos R. Intuitivamente, lo que ocurrirá es que un condicional $A \rightarrow B$ será verdadero en un punto fijo $P^{\alpha+1}$ si y sólo si cada en $R \in R^\alpha$ el valor del antecedente es menor o igual al valor del consecuente. Asimismo, cada $R^{\alpha+1}$ se obtiene purgando R^α de cualquier valuación que entre en conflicto con $P^{\alpha+1}$. Veremos que la secuencia de ordinales se forma de modo tal que P^α crece a medida que R^α se hace más pequeño. Eventualmente, P deja de crecer y *R* deja de encogerse, es decir, la construcción llega a un punto fijo.

Cada R^α será un conjunto de puntos fijos transparentes que respeta las condiciones que se presentarán más abajo, y cada P^α será un punto fijo. R^0 es el conjunto de *todos* los puntos fijos transparentes y P^0 es el punto fijo mínimo de Kripke. A su vez, cada R^α y cada P^α (para $\alpha \neq 0$) se obtendrán aplicando las reglas que introduciremos más abajo tanto para ordinales sucesores como para ordinales límite.

Antes de presentar la caracterización del condicional necesitamos cierta información adicional. En primer lugar, utilizaremos un esquema trivalente donde los valores son 1, 0 y ½. En segundo lugar, tenemos las siguientes definiciones:

100. El lector no familiarizado con la idea de orden parcial coherente completo puede consultar Gupta y Belnap (1993: capítulo 2) o el capítulo 3 del presente volúmen.

La l gica de la verdad.indd 205 07/07/2014 17:07:19

Definición 4.21 (Validar un condicional)

Decimos que un punto fijo $R \in R^{\alpha}$ *valida* $A \rightarrow B$ si y sólo si $R(A) \leq R(B)$.

Definición 4.22 (Incompatibilidad entre puntos fijos)

Decimos que un punto fijo R es *incompatible* con un punto fijo P si existe una fórmula que P hace verdadera (falsa) pero que R no hace verdadera (falsa).[101]

Con estas dos nuevas nociones ya estamos en condiciones de caracterizar el nuevo condicional para la teoría.

Definición 4.23 (El condicional de Yablo)

Para ordinales sucesores $\alpha+1$, definimos

$$P^{\alpha+1}(A \rightarrow B) = \begin{cases} 1 & \text{si cada } R \in R^{\alpha} \text{ valida } A \rightarrow B \\ 0 & \text{si cada } R \in R^{\alpha} \text{ invalida } A \rightarrow B \\ \frac{1}{2} & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Para ordinales límite λ, tenemos

$$P^{\lambda} = (A \rightarrow B) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\exists \beta<\lambda)(\forall \gamma \in [\beta,\lambda))(\text{todo } R \in R^{\gamma} \text{ valida } A \rightarrow B) \\ 0 & \text{si } (\exists \beta<\lambda)(\forall \gamma \in [\beta,\lambda))(\text{todo } R \in R^{\gamma} \text{ invalida } A \rightarrow B) \\ \frac{1}{2} & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Definición 4.24 (Los conjuntos R *de puntos fijos)*

El conjunto $R^{\alpha+1}$ queda definido de la siguiente manera: $R^{\alpha+1} = \{R \in R^{\alpha} \mid R \text{ es compatible con } P^{\alpha+1}\}$.

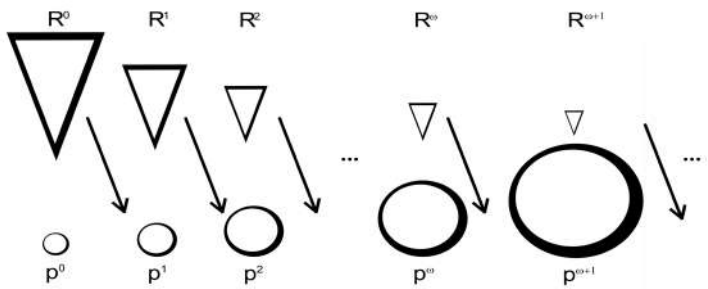
101. Nótese que la idea de compatibilidad utilizada no es simétrica. El único modo de que un punto fijo R sea incompatible con un punto fijo P es que P asigne 1 (0) y R asigne un valor distinto de 1 (0). No hay incompatibilidad si R asigna 1 (0) y P asigna algo distinto de 1 (0).

La l gica de la verdad.indd 206 04/07/2014 13:47:30

El conjunto R^{λ} queda definido tomando la intersección de todos los conjuntos de puntos fijos anteriores, esto es:

$R^{\lambda} = \{R \in \bigcap \gamma<\lambda\ R^{\gamma} \mid R \text{ es compatible con } P^{\lambda}\}$.

Una manera de graficar lo que ocurre es la siguiente:



Fuente: Adaptación de Yablo (2000: 325).

Dado que P^{α} varía inversamente a R^{α}, es evidente que si $\alpha < \beta$, entonces $P^{\alpha} \subseteq P^{\beta}$, lo cual quiere decir que para toda fórmula A de L^{+} si $P^{\alpha}(A) = 1\ (0)$, entonces $P^{\beta}(A) = 1\ (0)$. En otras palabras, los puntos fijos P son monótonos. En consecuencia, es posible mostrar (aunque omitiremos la prueba) que por cuestiones de cardinalidad esta secuencia eventualmente debe llegar a un punto fijo P^{γ}, que llamaremos *punto fijo mínimo de Yablo*:

Teorema 4.25 (Punto fijo mínimo de Yablo)

Existe un ordinal δ tal que $P^{\delta} = P^{\delta+1}$ y $R^{\delta} = R^{\delta+1}$.

El valor último de los condicionales está dado por el punto fijo mínimo de Yablo P^{δ}:

Definición 4.26 (Valor último de un condicional)

$|A \rightarrow B| = 1$ si y sólo si $P^{\delta}(A \rightarrow B) = 1$ si y sólo si $A \rightarrow B$ es validado por todos los puntos fijos transparentes R compatibles con P^{δ}.

La l gica de la verdad.indd 207 04/07/2014 13:47:35

$|A \rightarrow B| = 0$ si y sólo si $P^{\delta}(A \rightarrow B) = 0$ si y sólo si $A \rightarrow B$ es invalidado por todos los puntos fijos transparentes R compatibles con P^{δ}.

$|A \rightarrow B| = ½$ si y sólo si $P^{\delta}(A \rightarrow B) = ½$ si y sólo si $A \rightarrow B$ es validado por algunos puntos fijos transparentes compatibles con P^{δ} e invalidado por otros.

No es difícil constatar que, además de validar la sustitución de A por Tr‘A` en todo contexto, P^{δ} verifica todos los bicondicionales de la forma $Tr‘A’ \leftrightarrow A$.

Daré algunos ejemplos para ilustrar cómo funciona la teoría de Yablo. Recordemos que en este enfoque, a diferencia de lo que ocurre en el de Field, se llega un punto fijo. Eso implica que no es necesario probar que hay ordinales aceptables ni considerar el comportamiento de las fórmulas en las distintas etapas de la construcción. Por el contrario, para evaluar un condicional es suficiente observar qué ocurre en P^{δ}, el punto fijo mínimo de Yablo.

Ejemplo 4.27 (Introducción de la disyunción)

No es difícil ver que este principio es válido en la semántica de Yablo. Dado que R^0 es un conjunto de puntos fijos que respetan las reglas de K_3, siempre se cumple que $R(A) \leq R(A \vee B)$ para cualquier punto fijo $R \in R^0$. Por ende, todo punto fijo $R \in R^0$ *valida* el condicional $A \rightarrow (A \vee B)$.[102] Aplicando la cláusula para el nuevo condicional, sabemos que $P^1(A \rightarrow (A \vee B)) = 1$. Aplicando la cláusula para obtener el nuevo conjunto de puntos fijos R^1, quitamos de R^0 todos aquellos puntos fijos que sean incompatibles con P^1. Por ejemplo, si había algún punto fijo R en R^0 que asignaba ½ o 0 a la fórmula $A \rightarrow (A \vee B)$, ese punto fijo no sobrevive en R^1. Está claro que el valor de la fórmula $A \rightarrow (A \vee B)$ seguirá siendo 1 en todos los puntos fijos posteriores, inclusive en el punto fijo de Yablo P^{δ}, con lo cual el valor que la teoría le asigna es 1.

Por supuesto, la teoría también valida otras inferencias y principios deseables vinculados al condicional.

102. Aunque nótese que esto no quiere decir que el valor del condicional sea 1 en cualquier punto fijo kripkeano R. Los puntos fijos kripkeanos R no son composicionales respecto del condicional.

La l gica de la verdad.indd 208 04/07/2014 13:47:35

Teorema 4.28 (Principios y reglas para el condicional)

La semántica de Yablo valida los siguientes principios y reglas:

(1) $A, A \to B \vDash B$ (2) $A, \neg B \vDash \neg(A \to B)$

(3) $A \vDash B \to A$ (4) $(A_1 \to A_2) \wedge (A_1 \to B) \vDash A_1 \to (A_2 \wedge B)$

(5) $(A_1 \to B) \wedge (A_2 \to B) \vDash (A_1 \vee A_2) \to B$ (6) $\vDash A \to A$

(7) $\vDash \neg\neg A \to A$ (8) $\vDash (A \wedge B) \to A$

No es difícil mostrar, además, que la Paradoja de Curry recibe un tratamiento adecuado. Sea C nuevamente la oración $\mathrm{Tr}\text{`C'} \to 2 \neq 2$. $R^0$ contiene un punto fijo (llamémoslo $R_a$) que le asigna el valor 0 a $2 \neq 2$ y también a Tr'C'. Por lo tanto, $R_a$ valida $\mathrm{Tr}\text{`C'} \to 2 \neq 2$. R^0 también contiene punto fijo (llamémoslo R_b) que le asigna 0 a $2 \neq 2$ y 1 a Tr'C'. Por lo tanto, R_b valida $\mathrm{Tr}\text{`C'} \to 2 \neq 2$. De estos dos hechos se sigue que $P^1$ le asigna ½ a $\mathrm{Tr}\text{`C'} \to 2 \neq 2$. Como esta oración es C, P^1 le asigna ½ a Tr'C' (y obviamente le asigna 0 a $2 \neq 2$). En consecuencia, P^1 es compatible con R_a y R_b. Luego, R_a y R_b sobreviven al pasar a R^1. Por el mismo argumento, P^2 deja $\mathrm{Tr}\text{`C'} \to 2 \neq 2$ con valor ½, y así sucesivamente. En los ordinales límite, ocurre lo mismo. Con lo cual, $P^\delta(C) = ½$.

Una virtud adicional de la teoría es que soluciona todos los problemas mencionados anteriormente. Con respecto al problema de la arbitrariedad, podemos utilizar un razonamiento similar al que usamos para la oración de Curry. Sea H_3 la oración $(2 = 2) \to \mathrm{Tr}\text{`}H_3\text{'}$. $R^0$ también contiene un punto fijo (llamémoslo $R_a$) que le asigna el valor 1 a $2 = 2$ y a $\mathrm{Tr}\text{`}H_3\text{'}$. R^0 también contiene punto fijo (llamémoslo R_b) que le asigna 1 a $2 = 2$ y 0 a $\mathrm{Tr}\text{`}H_3\text{'}$. De estos dos hechos se sigue que $P^1$ le asigna ½ a $2 = 2 \to \mathrm{Tr}\text{`}H_3\text{'}$. Como esta oración es H_3, P^1 le asigna ½ a $\mathrm{Tr}\text{`}H_3\text{'}$ (y obviamente le asigna 1 a $2 = 2$). En consecuencia, $P^1$ es compatible con $R_a$ y $R_b$. Luego, $R_a$ y $R_b$ sobreviven al pasar a $R^1$. Por el mismo argumento, $P^2$ deja $2 = 2 \to \mathrm{Tr}\text{`}H_3\text{'}$ con valor ½, y así sucesivamente. Con lo cual, $P^\delta(H_3) = ½$, lo cual rescata la intuición de que asignarle cualquier otro valor sería arbitrario. Tanto el problema de la aribitrariedad como el de la estrechez del condicional reciben un tratamiento análogo que relegamos a los ejercicios.

La l gica de la verdad.indd 209 04/07/2014 13:47:35

Ejercicios para la sección 4

[1] Pruebe:

[1.1] $(A_1 \rightarrow A_2) \wedge (A_1 \rightarrow B) \vDash A_1 \rightarrow (A_2 \wedge B)$

[1.2] $A, \neg B \vDash \neg(A \rightarrow B)$

[1.3] $A \vDash B \rightarrow A$

[1.4] $\nvDash M \vee H$

[2] Muestre que la teoría de Yablo soluciona el problema de la infundación y el problema de la estrechez.

[3] Pruebe que la construcción de Yablo llega a un punto fijo.

[4] Reformule la teoría de Yablo para 4 valores de verdad.

5. La teoría de Field, en versión sofisticada

A pesar de solucionar los tres problemas mencionados anteriormente, la teoría de Yablo tiene algunos inconvenientes serios. Field (2008) señala, en primer lugar, que la teoría de Yablo es sumamente inadecuada para evaluar condicionales anidados. Para cualquier condicional de la forma $(A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow (B_1 \rightarrow B_2)$, en el cual $A_1 \rightarrow A_2$ sea distinto de $B_1 \rightarrow B_2$, puede mostrarse que la teoría le asigna el valor ½. La razón es sencilla. Dado que los puntos fijos dentro de R^{α} (para cualquier α) no son composicionales, incluso cuando $R(A_1) = R(A_2)$ y $R(B_1) = R(B_2)$, podemos tener un punto fijo $R_a \in R^{\alpha}$ tal que $R_a(A_1 \rightarrow A_2) = 1$ y $R_a(B_1 \rightarrow B_2) = 0$, y otro punto fijo $R_b \in R^{\alpha}$ tal que $R_b(A_1 \rightarrow A_2) = R_b(B_1 \rightarrow B_2) = 1$. Por ende, tenemos $P^{\alpha+1}((A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow (B_1 \rightarrow B_2)) = ½$. Además, está claro que R_a y R_b son compatibles con $P^{\alpha+1}$, con lo cual sobreviven en $R^{\alpha+1}$. Eso implica que el valor del condicional anidado permanece en ½ durante toda la secuencia de puntos fijos. Luego, su valor en el punto fijo mínimo de Yablo será ½. Nótese que el argumento que acabamos de presentar no depende en absoluto de qué formulas sean A_1, A_2, B_1 y B_2, mientras que el primer condicional sea distinto del segundo.

En segundo lugar, y como consecuencia de esto último, es claro que falla el Principio de Intersubstitutividad de Equivalentes. Por ejemplo, tenemos $\vDash A \leftrightarrow (A \vee A)$, pero $\nvDash (A \rightarrow B) \leftrightarrow ((A \vee A) \rightarrow B)$. Una vez más es sencillo constatar

La l gica de la verdad.indd 210 04/07/2014 13:47:37

que lo segundo falla. Dado que a ambos lados del bicondicional tenemos condicionales, habrá un punto fijo $R_a \in R^\alpha$ tal que $R_a(A \rightarrow B) = 1$ y $R_a((A \vee A) \rightarrow B) = 0$, y otro punto fijo $R_b \in R^\alpha$ tal que $R_b(A \rightarrow B) = R_b((A \vee A) \rightarrow B) = 1$. Por ende, tenemos $P^{\alpha+1}((A \rightarrow B) \leftrightarrow ((A \vee A) \rightarrow B)) = ½$. Se ve entonces que la falla de intersubstitutividad es una consecuencia inmediata de la falla generalizada de los condicionales anidados.

En tercer lugar, el poder expresivo de la teoría de Yablo es muy limitado. En particular, Field señala que el condicional no es adecuado para expresar operadores de patologicidad o indeterminación. Dado que hemos relegado la discusión de este asunto a la parte final del capítulo, simplemente señalaremos que contrariamente a lo que sucede en la propuesta de Field, donde es posible definir un operador de determinación a partir del condicional (y con él construir un operador de patologicidad), no es claro que el condicional de Yablo sea apto para definir un operador de determinación y por ende para definir un operador de patologicidad.[103]

Para solucionar estos problemas,[104] Field ofrece una versión más sofisticada de su teoría. En particular, la nueva versión de la teoría resuelve el problema de la estrechez del condicional haciendo que oraciones como $H \leftrightarrow \neg H$, $H \leftrightarrow M$ ya no reciban el valor designado. La nueva definición del condicional ya no involucra una cuantificación sobre todas las valuaciones que extienden a una cierta valuación S y todos los puntos fijos sobre esas valuaciones, sino solamente una cuantificación de los puntos fijos sobre la valuación S.[105]

103. En realidad, lo que Field señala es un poco más débil. Lo que ocurre en la teoría de Yablo es que las formas usuales de definir un operador de determinación a partir del condicional (en la teoría de Field) no funcionan apropiadamente.

104. Además de mencionar estos tres problemas, Field agrega que aunque Yablo está en lo correcto con respecto al problema de la estrechez del condicional, se equivoca en relación al problema de la arbitrariedad y al problema de la infundación –por razones de espacio omitimos aquí los argumentos de Field; el lector interesado puede ver Field (2005).

105. Cabe destacar que esta nueva versión de la teoría de Field también puede presentarse algebraicamente y en términos de semántica de vecindad. Un esbozo puede encontrarse en Field (2008: 274).

La l gica de la verdad.indd 211 04/07/2014 13:47:37

Definición 4.20 (El condicional de Field, segunda versión)

Para ordinales sucesores $\alpha+1$,

$S^{\alpha+1}(A \rightarrow B) =$ 1 si $(\forall P^{\alpha})$(si P^{α} es un punto fijo kripkeano sobre S^{α}, entonces $P^{\alpha}(A) \leq P^{a}(B)$)

0 si $P^{\alpha 0}(A) > P^{\alpha 0}(B)$[106]

½ en cualquier otro caso.

Para ordinales límite λ,

$S^{\lambda}(A \rightarrow B) =$ 1 si $(\exists \beta<\lambda)(\forall \gamma \in[\beta,\lambda))(\forall P^{\gamma})$(si P^{γ} es un punto fijo kripkeano sobre S^{γ}, entonces $P^{\gamma}(A) \leq P^{\gamma}(B)$)

0 $(\exists \beta<\lambda)(\forall \gamma \in[\beta,\lambda))(P^{\gamma 0}(A) > P^{\gamma 0}(B))$

½ en cualquier otro caso.

Hay una serie de características que cabe destacar respecto de la nueva versión. Tanto si se trata de ordinales sucesores como si se trata de ordinales límites, las únicas valuaciones que consideramos al tratar de establecer el valor de un condicional en S^{α} son puntos fijos kripkeanos. Por ende, contrariamente a lo que sucedía en los puntos fijos R considerados por Yablo donde el condicional era sumamente no composicional, en estos puntos fijos los condicionales se comportan de manera razonable, y esto obliga a la teoría a validar varios principios con condicionales anidados. Este hecho, a su vez, hace que no haya problemas con el Principio de Intersubstitutividad de Equivalentes. Por otra parte, una diferencia crucial con la teoría de Yablo es que los conjuntos de valuaciones S que quedan definidas ya no son monótonos. Es decir, puede ocurrir que $\alpha < \beta$ pero que $S^{\alpha} \not\subseteq S^{\beta}$, lo cual quiere decir que podría ocurrir para alguna fórmula A de L^{+} que $S^{\alpha}(A) = 1$ (0) y $S^{\beta}(A) = ½$.[107] De esto se sigue que ya no podemos

106. Aquí $P^{\alpha 0}$ es el punto fijo mínimo kripkeano sobre la valuación S^{α}. Es decir obtenemos $P^{\alpha 0}$ aplicando las cláusulas de Kleene-Kripke sobre S^{α} *y no hacemos ninguna asignación extra de valores semánticos*.

107. Un ejemplo concreto de esto es, nuevamente, la oración de Curry, que en ordinales sucesores fluctúa entre 0 y 1 y es siempre ½ en ordinales límite.

La l gica de la verdad.indd 212 04/07/2014 13:47:37

usar el argumento de la cardinalidad para mostrar la existencia de un punto fijo. De cualquier modo, sí podemos definir valor último (y por ende validez) en términos de estabilidad, como se hacía en la teoría original de Field presentada en la sección 2. Y, aunque de esto hablaremos más adelante, el condicional de la teoría es adecuado para construir un operador de patologicidad (contrariamente a lo que sucedía en la propuesta de Yablo).

A modo de ilustración, mostraremos por qué la nueva teoría valida $H \leftrightarrow H$ pero no valida $H \leftrightarrow \neg H$.[108]

Ejemplo 4.30 (Bicondicionales problemáticos)

Con respecto al primer bicondicional, está claro que cualquier punto fijo sobre cualquier valuación tiene que validarlo. Con respecto al segundo, está claro que el punto fijo mínimo sobre S^0, que llamaremos P^{00}, es tal que $P^{00}(H) = P^{00}(\neg H) = ½$, pero también hay puntos fijos P^{0a} (distintos del mínimo) sobre S^0 tal que $P^{0a}(H) = 1\ (0)$ y $P^{0a}(\neg H) = 0\ (1)$. Por ende, tenemos $S_1(H \leftrightarrow \neg H) = ½$. Lo mismo ocurrirá en S^α para cualquier ordinal $\alpha \geq 1$. Por lo tanto, $|H \leftrightarrow \neg H| = ½$.

Ejercicios para la sección 5

[1] Muestre que la nueva versión de la teoría de Field valida $M \leftrightarrow \neg M$.

[2] Considere las siguientes dos oraciones

$A_1 =_{df} \neg Tr\text{`}A_2\text{'}$

$A_2 =_{df} \neg Tr\text{`}A_1\text{'}$

Muestre que la nueva versión de la teoría de Field categoriza adecuadamente las oraciones $A_1 \rightarrow \neg A_2$, $A_2 \rightarrow \neg A_1$, $A_1 \rightarrow A_2$, $A_2 \rightarrow A_1$, mientras que la versión anterior sólo categoriza apropiadamente las dos últimas.

[3] Considere la siguiente cláusula para el condicional:

108. La teoría tampoco válida $H \rightarrow M$ o $M \rightarrow H$. Lamentablemente, sigue siendo válido el bicondicional $M \leftrightarrow \neg M$, con lo cual el problema de la estrechez se soluciona sólo parcialmente.

La l gica de la verdad.indd 213 04/07/2014 13:47:37

$S^{\alpha}(A \rightarrow B) =$ 1 si $(\exists\beta<\alpha)(\forall\gamma\in[\beta,\alpha))(P^{\gamma}(A) \leq P^{\gamma}(B))$

0 si $(\exists\beta<\alpha)(\forall\gamma\in[\beta,\alpha))(P^{\gamma}(A) = 1 \wedge P^{\gamma}(B) = 0)$

½ en cualquier otro caso.

Encuentre una fórmula que fluctúe entre 1 y 0 en ordinales sucesores.

6. Sobre el operador de 'Determinación'

Una parte sustantiva de la propuesta de Field es su postulada capacidad para resolver un tipo particular de paradojas: las revanchas. Estas aparecen cuando se introducen en el lenguaje las nociones metalingüísticas necesarias para resolver las paradojas semánticas tradicionales.[109] Una revancha de este estilo surge, por ejemplo, en los sistemas multivalentes que pueden resolver la paradoja del Mentiroso pero que, para evitar inconsistencias, no logran expresar la idea de "no ser verdadero" –la que habitualmente se solapa con la de "no tener valor designado". Sería deseable que pudiéramos expresar la idea de "no ser verdadero" –o, de modo análogo, de "no tener valor designado". Pero no podemos hacerlo sin caer en paradojas. Más precisamente, si tenemos un operador de negación no monótono, que asigne el valor 0 a una oración cuando toma como argumento un valor distinto de 1, entonces, si nuestro lenguaje es lo suficientemente fuerte como para referir a sus propias expresiones, entonces tendrá una oración que "diga de sí misma" que no es verdadera –i.e., que no tiene el valor designado. Sea "Des" el predicado "tiene valor designado". En lo que sigue trabajaremos con una teoría capaz de probar el Lema Diagonal [110]. Este lema nos permite probar:

$\vdash B \leftrightarrow \neg Des\text{`}B\text{'}$ (Lema Diagonal)

109. La distinción, de todas formas, es externa a la propuesta de Field, quien establece las bases para un abanico de lógicas a las que va a llamar "Lógicas G" ("G-Logics", por "Good Logics", es decir, lógicas correctas o adecuadas), todas las cuales permiten formular en el lenguaje las verdades acerca de él mismo que les permiten evitar las paradojas semánticas.
110. Una formulación del Lema Diagonal puede encontrarse en el capítulo 1 de este volumen.

La l gica de la verdad.indd 214 04/07/2014 13:47:37

Una forma de ver esto es pensar que la lógica de Field habilita las siguientes inferencias:

Des‘A’ ⊨ A (Des-elim)
A, ¬Des‘A’ ⊨ ⊥ (Des-incoh)

Pero si tenemos una oración B que dice de sí que no tiene valor designado, llegamos a una paradoja. Des ‘B’ implica B por Des-Elim, y ¬Des‘B’ implica B por la definición de B. Por Eliminación de la Disyunción y LEM, llegamos a B, y de este punto a ¬Des‘B’. Y esto es absurdo por Des-Incoh.

Desde un punto de vista semántico, si tenemos una oración B que dice no tener el valor designado, la oración B ↔ ¬Des‘B’ debe tener valor designado también (porque ambos términos de la equivalencia tiene el mismo valor). Pero entonces B tiene valor designado si y solo si ¬Des‘B’ lo tiene. Pero si B tiene valor designado, Des‘B’ también, por lo cual ¬Des‘B’ no debería tenerlo. Por eso, B no tiene el valor designado. Pero si B no tiene el valor designado ¬Des‘B’ lo tiene. Pero eso contradice el bicondicional de arriba. Por ende, dado que B tiene el valor designado o no lo tiene, llegamos a un absurdo.

Field pretende expresar tanto como se pueda –sin caer en paradojas; más precisamente, sin caer en revanchas– la idea de que una oración no tiene el valor designado. ¿Cómo lo hace? Al menos parcialmente, a través de un operador D de determinación. Esto le permite decir cosas como “Esa oración es determinadamente verdadera”. Este operador puede iterarse y decir en el lenguaje, por ejemplo, que la oración anterior es determinadamente verdadera.

¿Cuál es la interpretación intuitiva de ese operador? ¿Puede leerse, literalmente, como “tiene el valor designado”? El argumento que hemos ofrecido unas líneas arriba muestra que no. Pero en principio, parece tener otra lectura más intuitiva. En ella, el operador D se aplica a oraciones claramente verdaderas. Pensemos en aquellas oraciones que aplican predicados vagos; por caso, las oraciones que expresen que una persona que mida 2 metros es alta –porque quien mida 2 metros es un caso claro de persona alta. Seguramente, el predicado ‘ser alto’ no se aplique correctamente (con verdad) a quien mida 1.60 (pues muy probablemente esto califique como un caso claro de persona baja). Es decir, es un caso claro de persona no-alta. En cualquier caso, con toda certeza no es un caso de persona alta. Field acerca la idea de ser determinadamente verdadero,

La l gica de la verdad.indd 215 04/07/2014 13:47:37

por un lado, a la de tener el valor designado, y, por otro, a la de aplicarse claramente a un cierto caso. Esto se volverá más nítido cuando veamos qué principios obedecen uno y el otro.

Para resolver el problema de las revanchas y simultáneamente tener los medios para caracterizar apropiadamente todas las oraciones que no son ni claramente verdaderas ni claramente falsas, Field define formalmente el operador D de determinación (donde 'DA' debe leerse como ´A es determinadamente verdadera`) como sigue:

Definición 4.31 (El operador de determinación)

$DA =_{df} A \wedge \neg(A \rightarrow \neg A)$[111]

D puede ser usado para clasificar, por ejemplo, a la oración del mentiroso como ni determinadamente verdadera ni determinadamente falsa. En general, es posible definir otro operador U (donde UA puede leerse como "A es patológica" o "A es semánticamente defectuosa" o algo similar) en términos del operador D del modo siguiente:

$UA =_{df} \neg DA \wedge \neg D\neg A.$

Definición 4.32 (Operador de determinación razonable)

Sea $v(A)$ el valor de verdad de la fórmula A. Decimos que un operador D es un *operador de determinación razonable* si y sólo si cumple con estos requisitos:

(a) Si $v(A) \leq v(B)$, entonces $v(DA) \leq v(DB)$
(b) Si $v(A) = 1$ entonces $v(DA) = 1$
(c) $v(DA) \leq v(A)$
(d) Si $v(A) \leq v(\neg A)$, entonces $v(DA) = 0$

111. Esta no es la única forma de definir D. Field da también esta otra: *DA =df A ∧(T → A)*, donde T es una tautología cualquiera. En el cuerpo del texto, presentamos aquella con la que trabaja el propio Field.

La l gica de la verdad.indd 216 04/07/2014 13:47:37

El requisito (a) corresponde a –es decir, busca recoger– la regla $A \rightarrow B \vDash DA \rightarrow DB$. (b), por su parte, corresponde a $A \vDash DA$, mientras que (c) recoge a $DA \vDash A$ y (d) a $A \rightarrow \neg A \vDash \neg DA$.

Con esto, Field busca definir la idea de "determinación" a través de este operador D, como forma de evitar las paradojas de revancha. La clave es que falle la Idempotencia de D, es decir, que a veces DA y DDA tengan un valor distinto. Veamos, por ejemplo, lo que pasa con la primera revancha (i.e., con una paradoja tipo Mentiroso, con la negación del operador de determinación, aplicada a una oración sin otro operador de determinación).

Ejemplo 4.33 (Falla de idempotencia 1)

Sea D un operador de determinación razonable y sea B una oración que dice que ella misma no es determinadamente verdadera, tal como expresa (*):

(*) $v(B) = v(\neg DB)$

Luego, tenemos:

$v(DB) \neq 0$, $v(DB) < v(B)$ y $v(DDB) = 0 < v(DB)$

Prueba:

[1] $v(DB) = 0$	Supuesto
[2] $v(\neg DB) = 1$	[1]
[3] $v(B) = 1$	(*) y [2]
[4] $v(DB) = 1$	(b) y [3]
[5] $\bot$	[1] y [4]
[6] $v(DB) \neq 0$	[1]-[5]
[7] $v(\neg B) < v(B)$	(d) y [6]
[8] $v(DB) < v(B)$	(*) y [7]
[9] $v(DB) \leq v(\neg DB)$	(*)
[10] $v(DDB) = 0$	(d) y [9]

La l gica de la verdad.indd 217 04/07/2014 13:47:37

La solución de la revancha, entonces, está dada porque DB tiene un valor menor a B, mientras que DDB (es decir, una nueva aplicación de D) es directamente 0. El proceso se da de un modo análogo para toda iteración de D: no sólo DD y D pueden no ser idempotentes, tampoco lo van a ser DD y DDD, DDD y DDDD, y así. Es decir, para cualquier ordinal sucesor $\alpha+1$, puede ocurrir que $\alpha+1$ aplicaciones de D no tenga el mismo valor que α aplicaciones de D. Lo mismo vale para ordinales límite –donde sea $v(D_{\lambda}B)$ en general, el ínfimo de $\{v(D_{\alpha}B)|\alpha < \lambda\}$. Tenemos una jerarquía de operadores que se vuelven cada vez más fuertes (es decir, que dan menos valor).

¿Qué pasa con mentirosos transfinitos (o iterados para cualquier ordinal α)? La situación va a ser similar.

Ejemplo 4.34 (Falla de idempotencia 2)

Sea D un operador de determinación razonable y sea B una fórmula que cumple con:

(*) $v(B) = v(\neg D_{\alpha}B)$

Luego, tenemos:

$v(D_{\alpha}B) \neq 0$ y $v(D_{\alpha+1}B) = 0 < v(D_{\alpha}B)$

Prueba:

[1] $v(D_{\alpha}B) = 0$	Supuesto
[2] $v(\neg D_{\alpha}B) = 1$	[1]
[3] $v(B) = 1$	(*) y [2]
[4] $v(DB) = 1$, $v(DDB) = 1$, y así hasta llegar a que $v(D_{\alpha}B) = 1$	(b) y [3]
[5] $\perp$	[4] y [1]
[6] $v(D_{\alpha}B) \neq 0$	[1]-[5]
[7] $v(D_{\alpha}B) \leq v(B)$	(c)
[8] $v(D_{\alpha}B) \leq v(\neg D_{\alpha}B)$	(*) y [7]
[9] $v(D_{\alpha+1}B) = 0$	(d)

La l gica de la verdad.indd 218 04/07/2014 13:47:37

Luego, $D_{\alpha+1}B$ es más fuerte que $D_{\alpha}B$. En resumen: la situación es que para un B dado, la oración $D_{\alpha}B$ se hace cada vez más fuerte a medida que la iteración se incrementa, hasta llegar a $\alpha+1$ iteraciones de D. En ese momento, no hay más refuerzo como resultado de agregar una nueva iteración de D, porque la oración vale 0.

En el caso anterior, el ordinal α utilizado como subíndice no es una variable. Por tanto deberíamos tener en el lenguaje un operador para cada uno de esos ordinales. Y si el lenguaje es contable, hay un límite claro a la posibilidad de mentirosos transfinitos. Aunque en principio parece deseable exigir un concepto unificado de determinación, ¿cuál sería su utilidad? La determinación es una noción periférica, no central, como la verdad. Más aún, se la postula para explicar el comportamiento del predicado de verdad. Y en el enfoque presentado, se cuenta con una noción unificada de verdad (en particular, en los casos de revanchas). Más aún, la teoría de Field es determinadamente verdadera en todo nivel de determinación –lo que no pasa con las teorías estratificadas de la verdad.

De todas formas, es legítimo preguntarse por el límite de estas iteraciones. Es decir: ¿cuán grande puede ser la iteración de operadores de determinación? O, más precisamente (dado que el lenguaje es finitario): ¿puede haber partes del lenguaje que expresen la iteración transfinita de operadores de determinación? La respuesta es que sí. Recordemos que DA se define como $A \wedge \neg(A \rightarrow \neg A)$. Dada nuestra definición del condicional, tenemos lo siguiente:

Teorema 4.35 (El operador de determinación y las secuencias de revisión)

Para cualquier ordinal α, tenemos:

$$v^{\alpha}(DA) = \begin{cases} v^{\alpha}(A) & \text{si } (\exists\beta<\alpha)(\forall\gamma)(\beta \leq \gamma < \alpha \rightarrow v^{\gamma}(A) = 1) \\ 0 & \text{si } (\exists\beta<\alpha)(\forall\gamma)(\beta \leq \gamma < \alpha \rightarrow v^{\gamma}(A) < 1) \\ \tfrac{1}{2} & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Como casos especiales tenemos:

Para el ordinal 0,

$$v^{0}(DA) = \begin{cases} 0 & \text{si } v^{0}(A) = 0 \\ \tfrac{1}{2} & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

La l gica de la verdad.indd 219 04/07/2014 13:47:37

Para cualquier ordinal sucesor $\alpha+1$,

$$v^{\alpha+1}(DA) = \begin{cases} v^{\alpha+1}(A) & \text{si } v^{\alpha}(A) = 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Ahora veamos qué pasa con los Mentirosos. Dado que B_σ equivale a $\neg D_\alpha Tr(\ulcorner B_\sigma \urcorner)$, y dado que vale intersustitutividad, entonces para todo α, su cumple que:

(*) $v^{\alpha}(B_\sigma) = 1 - v^{\alpha}(D_\sigma B_\sigma)$

Para todo ordinal α, si tenemos que $v^{\alpha}(D_\sigma B_\sigma) \leq v^{\alpha}(B_\sigma)$, entonces por (*) sólo quedan dos opciones. O bien $v^{\alpha}(B_\sigma) = v^{\alpha}(D_\sigma B_\sigma) = ½$, o bien $v^{\alpha}(B_\sigma) = 1$ y $v^{\alpha}(D_\sigma B_\sigma) = 0$. Si hay un σ-intervalo inmediatamente precedente a α, donde B_σ toma sólo el valor 1, entonces la segunda opción es verdadera. En cambio, si ese σ-intervalo tomara el valor ½ en algún punto, entonces la primera opción es verdadera. Eventualmente, entonces, la oración hará un ciclo de valores, que consiste en un ½ seguido de σ 1s. Más precisamente:

1. Empezamos con B_σ, con ciclos de ½ seguidos de σ 1s, donde σ es un número finito grande o infinito.

2. Aplicamos una sola D a esa oración. Ahora tendremos ciclos de la misma longitud $\sigma+1$, pero esta vez es ½, luego 0, luego 1 en el resto de los valores.

3. Aplicamos otra D (para llegar a DDB_σ), y tendremos ciclos de la misma longitud, pero con ½ seguido de dos 0s seguidos por todos 1s.

4. Esto funciona para todas las etapas finitas.

5. También funciona para las etapas infinitas. De hecho, $D_\omega B_\sigma$ vale ½ al principio, luego vale 0 en todas las etapas finitas; si $\sigma = \omega$, entonces tendrá valor ½ en v^{ω}. Si $\sigma > \omega$, entonces $D_\omega B_\sigma$ valdrá 0 en v^{ω}, y tendremos que esperar hasta σ para llegar a ½ otra vez.

En resumen, las soluciones de los mentirosos y mentirosos reforzados se basan en la no-idempotencia del operador de determinación, D. Es decir que

La l gica de la verdad.indd 220 04/07/2014 13:47:38

en algunos casos, DA y DDA tienen valores distintos (en particular, en casos de reforzados $D_\omega A$, la idea es darle a $D_\omega A$ un valor entre 0 y 1, y darle a $D_{\omega+1} A$ el valor 0). Pero si tenemos un operador de hiperdeterminación HD que exprese, en cierta medida, algo similar a la idea de ser determinadamente verdadero en alguna de las nociones de determinación (esto es, para cualquier predicado que exprese un número x de iteraciones del predicado de determinación, donde 'x' es algún ordinal), la intuición parece indicar que ese operador debería ser idempotente. En ese caso, podríamos tener un mentiroso reforzado imposible de solucionar —es decir, una oración del siguiente estilo: 'esta oración no es determinadamente verdadera en ninguno de los sentidos/niveles de determinación'.

En cualquier caso, hay distintas preocupaciones emparentadas, todas acerca de potenciales revanchas detrás de este tema, y Field se ocupa de distinguir entre ellas una débil, una intermedia y una fuerte. Veámoslas.

Preocupación fuerte: Si agregamos el operador de hiperdeterminación, tenemos nuevas paradojas que nos harán abandonar el Esquema T.

Preocupación intermedia: El operador de determinación no puede ser consistente con con la noción de verdad, en el marco semántico introducido —en una semántica-G. No es que las nuevas paradojas no podrían tener solución, pero ella apelaría a una jerarquía de niveles de lenguaje —esto es, a recursos exógenos al marco semántico de una solución-G.

Preocupación débil: Si tenemos una jerarquía de operadores de determinación bien definidos, parece que podemos reflexionar sobre ella para hacer inteligible un operador de hiperdeterminación no definible en el lenguaje original. Esto, eventualmente, podría dar lugar a nuevas paradojas. El punto no es que esas nuevas paradojas no puedan ser resultas en el marco de una semántica-G (este es el punto de la preocupación intermedia). Pero cualquier solución en este marco, tendría que apelar a una jerarquía de lenguajes, cada uno con su propia solución-G. Y este es uno de los puntos en los que el enfoque de Field se pretende superior a los enfoques estratificados tradicionales.

A continuación presentaremos una serie de resultados y, en general, no daremos pruebas de ellos. El contenido es técnicamente demandante y sigue muy de cerca los trabajos de Field. La idea general de Field es la siguiente: un operador HD es solo definible con muchas dificultades. Y de hecho, llegado a un punto en

La l gica de la verdad.indd 221 04/07/2014 13:47:38

la generalidad de la jerarquía de operadores de determinación, los operadores se vuelven ininteligibles.

Definición 4.36 (Iteraciones de D)

Cada iteración D_α de D es un operador sintáctico que toma una L^+-fórmula A y nos da una L^+-fórmula $D_\alpha A$ con las mismas variables libres. Diremos que:

(1) D_0 es el operador de identidad, por lo cual $D_0 A = A$.

(2) Para ordinales sucesores $\alpha+1$, $D_{\alpha+1} A = DD_\alpha A$.

(3) Para ordinales límite λ, $D_\lambda A$ debería equivaler a la conjunción infinita de los D_α para $\alpha < \lambda$.

Como el lenguaje es finitario, $D_\lambda A$ no puede, literalmente, ser esa fórmula. El alcance de esta conjunción, de todas formas, siempre está acotado a ordinales menores a σ, donde σ es la longitud de la jerarquía. Esto permite definir una jerarquía de iteraciones del operador de determinación.

Definición 4.37 (Jerarquía de iteraciones de D)

Sea OP el conjunto de operaciones sobre fórmulas de L^+ que asignan a cada fórmula A otra fórmula con las mismas variables libres. Sea s una función que asigna objetos del dominio a las variables de L^+. Para toda operación O que pertenezca a OP, Det(O) es la operación que convierte a cada fórmula A en el resultado de aplicar D a O(A). Una *jerarquía de iteraciones de* D, entonces, es una función H de ordinales α tales que $\alpha < \sigma$, en OP, para algún ordinal límite σ_H, que cumpla con lo siguiente:

(1) H(0) es el operador de identidad.
(2) Para todo ordinal α menor a σ, $H(\alpha+1) = Det(H(\alpha))$
(3) Para todo ordinal límite λ menor a σ_H, s satisface $H(\lambda)(x)$ si y solo si s satisface $H(\beta)(x)$ para cada $\beta < \lambda$.

La l gica de la verdad.indd 222 04/07/2014 13:47:38

Definición 4.38 (Equivalencia de operadores)

Decimos que dos *operadores* O_1 y O_2 son *equivalentes* si para toda fórmula A en L^+, s satisface O_1A si y sólo si s satisface O_2A.

Definición 4.39 (Compatibilidad de jerarquías)

Decimos que dos *jerarquías* H_1 y H_2 son *compatibles* si y sólo si para todo ordinal α en el dominio de ambas, $H_1(\alpha)$ es equivalente a $H_2(\alpha)$ (es decir, si cada uno de sus 'eslabones' –que son operadores– son equivalentes).

A partir de estar definiciones, Field prueba un importarte teorema: el Teorema de Equivalencia.

Teorema 4.40 (Teorema de Equivalencia)

H_1 y H_2 son jerarquías $\vDash$ H_1 es compatible con H_2.[112]

Prueba: Por inducción transfinita. Asumamos que H_1 y H_2 son jerarquías, A es una fórmula, y s es una función de asignación. Necesitamos que para todo $\alpha < min\{\sigma_{H1}, \sigma_{H2}\}$, s satisface $[H_1(\alpha)]$ si y sólo si s satisface $[H_2(\alpha)]$. Por la regla de inducción transfinita, válida aún para los predicados no clásicos,[113] es suficiente mostrar que para todo $\alpha < \min\{\sigma_{H1}, \sigma_{H2}\}$, tenemos:

* $(\forall\beta<\alpha)$(s satisface $[H_1(\beta)]$A si y solo si s satisface $[H_2(\beta)]A \rightarrow$ s satisface $[H_1(\alpha)]A$ & s satisface $[H_2(\alpha)]A$ si y solo si s satisface $[H_2(\alpha)]A$.

Dada la suposición de que tanto H_1 y H_2 son jerarquías, la conclusión es evidente para los casos en los que α es 0 (porque en ambos casos se trata de la fórmula A) o sucesor (porque en ambos casos, la fórmula que s satisface o no, es el resultado de aplicar el operador D a la misma fórmula –con un número determinado pero

112. Nótese que por la falla de LEM el teorema no puede formularse en forma condicional, sino sólo en forma inferencial.

113. Véase la prueba de esto en Field (2006: sección 5).

La l gica de la verdad.indd 223 04/07/2014 13:47:38

finito de aplicaciones de D). Para ordinales límite λ, la suposición de que hay jerarquías nos da, para cualquier $\alpha < min\{\sigma_{H1}, \sigma_{H2}\}$, que:

** [s satisface $[H_1(\alpha)]A$ si y solo si $(\forall\beta<\alpha)$ (s satisface $[H_1(\beta)]A] \wedge$ [[s satisface $[H_2(\alpha)]A$ si y sólo si $(\forall\beta<\alpha)$ (s satisface $[H_2(\beta)]A]$

Y esto nos da el resultado deseado a través de la inferencias $(X_1 \leftrightarrow Y_1) \wedge (X_2 \leftrightarrow Y_2) \vDash (Y_1 \leftrightarrow Y_2) \rightarrow (X_1 \leftrightarrow X_2)$, que vale en cualquier Lógica-G.

Ahora bien: especificar los D_λ se va volviendo cada vez más complicado. D_ω es el más fácil. Sea A(x) una fórmula donde la variable x está libre. Podemos hacer que $D_\omega A$ sea la fórmula:

Para todo *n*, x satisface toda fórmula que resulte de poner *n* ocurrencias de D delante de la fórmula A.

Pero para otros ordinales límite suficientemente grandes –por ejemplo, todos los ordinales no definibles en L^+–, definir el D que les corresponde es imposible. Por eso, podemos tomar a λ como el límite de una secuencia de ordinales, y a D_λ como diciendo simplemente que para todos los ordinales en esa secuencia, el resultado de prefijar el operador D_α apropiado a A es verdadero. Pero hay muchas secuencias de ordinales para llegar a λ, por lo cual no habrá una forma única de definir D_λ. La especificación de D_λ dependerá del camino *p* de definiciones que se emplee.

Definición 4.41 (Camino)

Sea L_R un fragmento fijo de L^+ para el cual vale LEM, sea λ_R el primer ordinal no definible en L_R y sea σ un ordinal límite menor que λ_R. Una función *p* es un *camino* cuando asigna a cada ordinal límite λ menor que σ una definición L_R de él, es decir, una fórmula de L_R que sólo es satisfecha por él.

Las jerarquías pueden ser dependientes o independientes del camino. Empecemos por las primeras. Las jerarquías *dependientes del camino* podrán tener longitudes hasta λ_R inclusive. Como σ es menor a λ_R, sus predecesores son L_R-definibles.

La l gica de la verdad.indd 224 04/07/2014 13:47:38

Teorema 4.42 (Existencia de jerarquías 1)

Sea σ un ordinal contable límite, sea Pred(σ) el conjunto de predecesores de σ, y sea $\text{Pred}_{\text{lim}}(\sigma)$ el conjunto de ordinales límite que preceden a σ. Sea P_σ el conjunto de funciones de $\text{Pred}_{\text{lim}}(\sigma)$ en fórmulas con una sola variable libre y sea P la unión de todas las P_σ para todos los σ contables. Sea OP el conjunto de operaciones sobre L^+-fórmulas, y sea J el conjunto de funciones que van desde el segmento inicial de un ordinal contable hacia OP. Dado esto, podemos afirmar que:

Hay una función φ: P $\rightarrow$ J, definible en L_0, tal que para todo camino L_R p, $\varphi(p)$ es una jerarquía de longitud σ_p.

Teorema 4.43 (Existencia de jerarquías dependientes del camino 1)

Dado que hay caminos-L_R de cualquier longitud límite hasta λ_R inclusive, se sigue como corolario de lo anterior que hay jerarquías *dependientes del camino* de cualquier longitud hasta λ_R inclusive.

Una consecuencia interesante es que no hay una longitud máxima para L_R-jerarquías. De hecho, cada jerarquía L_R-definible tiene una extensión propia que también es L_R-definible.

En el fragmento sucesor a L_R, al que llamamos L_{R^*}, podemos cuantificar sobre las jerarquías de L_R. Cuando α es menor a λ_R, se cumple lo siguiente:

Teorema 4.44

Sea A es una fórmula con una sola variable libre v, y sea $\mathsf{D}_{\alpha LR}$A la fórmula:

$\exists p$(p es un camino & $\alpha < \sigma_p$ & el resultado de aplicar [$\varphi(p)$](α) a 'A' es verdadero de v)

Por el teorema de equivalencia, para todo camino L_R p, el operador $\mathsf{D}_{\alpha LR}$ es equivalente a $\mathsf{D}_{\alpha p}$ cuando este último está definido. Asimismo, para cada $\alpha < L_R$, hay L_R-caminos p para los cuales $\mathsf{D}_{\alpha p}$ está definido.

Surge, en este punto, la siguiente pregunta: ya que usamos el fragmento sucesor L_{R^*}, ¿no podríamos tener una jerarquía *independiente* del camino DL_{R^*}? Desde ya,

La l gica de la verdad.indd 225 04/07/2014 13:47:38

las fórmulas que dé este nuevo operador serán distintas, porque considerarán más caminos. Pero respecto a los ordinales menores a λ_R, los operadores serán equivalentes; por eso decimos que el nuevo operador DL_{R^*} es en cierto sentido, efectivamente, una extensión del operador DL_R.

Supongamos que tenemos una jerarquía independiente del camino en la "jerarquía de jerarquías", como $\{D_{\alpha LR} \mid \alpha < \lambda_R\}$. ¿Nos enfrentamos a algún tipo de forma débil de revancha? No. Porque hemos definido $D_{\alpha LR}$ para la variable α. Por tanto, podemos 'unificar' todos los operadores así definibles, de la siguiente manera:

$$D_{hyp}(\lambda_R)A = \forall\alpha(\alpha < \lambda_R \rightarrow D_{\alpha LR}A)$$

Obviamente $D_{hyp}(\lambda_R)$ no pertenece a la jerarquía $D_{\alpha LR}$, pero es definible en L^+ (más precisamente, en L_{R^*}), por la definición recién dada: es el miembro λ_R de su "extensión" propia en la jerarquía $\{ D_{\alpha[LR^*]} \mid \alpha < \lambda_{R^*}\}$. Como producto de su definibilidad, y el resultado general de consistencia, tenemos garantías de que $D_{hyp}(\lambda_R)$ no lleva a paradojas.

Pero, ¿qué pasa si queremos ir desde iteraciones D_α de D definibles en un fragmento clásico de L^+ a iteraciones definibles en el L^+ completo? Un punto crucial es que la pregunta de cuántos operadores sintácticos sobre oraciones cuentan como iteraciones de D antes de volverse aplicaciones difusas del operador. Pues no podemos asumir que para un operador O, O es una iteración de D o no lo es. Veamos por qué. Sea un L^+-camino un miembro p de P que asigna a cada ordinal límite λ menor a σ_p una L^+-definición de él. La noción de L^+-definición es difusa,[114] por lo cual la de L^+-camino también.

Es posible mostrar el siguiente resultado, similar al Teorema 4.42 excepto por el hecho de que está formulado en forma inferencial (no condicional):

Teorema 4.45 (Existencia de jerarquías 2)

Hay una función φ: $P \rightarrow J$, definible en L_0, tal que:

p es un L^+-camino $\vDash A(p)$ es una jerarquía de longitud σ_p

114. Si no lo fuera, tendríamos que lidiar con la paradoja de Berry-Richard y el resto de las paradojas de definibilidad. Para una ampliación de este punto véase Field, 2006: sección 4).

La l gica de la verdad.indd 226 04/07/2014 13:47:38

La función φ construye algo desde un camino, pero dado que es difuso si *p* es un L^+-camino, también es difuso lo que fue construido como jerarquía de iteraciones de D. Del mismo modo, entonces, modificamos el corolario:

Teorema 4.46 (Existencia de jerarquías dependientes del camino 2)

$\exists p$(*p* es un L^+-camino de longitud σ) ⊨ $\exists$H(H es una jerarquía dependiente del camino de iteraciones de D con longitud σ).

También tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.47 (Existencia de un L^+-camino)

Todos los predecesores de σ son L^+-definibles ⊨ Hay un L^+-camino de longitud σ.

Decimos que un ordinal es *casi hereditariamente L^+-definible* cuando todos sus predecesores son L^+-definibles. Si σ no es casi hereditariamente L^+-definible, entonces no hay jerarquías dependientes del camino de D con longitud σ. Y tenemos, también, el siguiente resultado:

Teorema 4.48 (Existencia dependientes del camino 3)

σ es casi hereditariamente L^+-definible ⊨ Hay jerarquías dependientes del camino de iteraciones de D de longitud σ.

También podemos definir una jerarquía independiente del camino $D_{\alpha L+}$, como antes definimos una jerarquía $D_{\alpha LR}$. La diferencia es que antes sabíamos que el resultado era trivial cuando α es mayor a λ_R; pero ahora no tenemos idea de cuándo se vuelve trivial la definición; se trata de un asunto difuso. Si λ es un ordinal límite no definible en L^+, entonces para todo $\alpha \geq \lambda$, $D_{\alpha L+}$ es trivial. Por ende, si σ no es casi hereditariamente L^+-definible, entonces $D_{L+} \restriction \text{Pred}(\sigma)$ falla en ser una genuina jerarquía de iteraciones de D. De todas formas, tenemos el siguiente resultado:

La l gica de la verdad.indd 227 04/07/2014 13:47:38

Teorema 4.40 (Existencia de jerarquías 3)

σ es casi hereditariamente L^+-definible ⊨ D_{L+} ↾ Pred(σ) es una jerarquía genuina de iteraciones de D.

Un problema interesante es si hay una jerarquía máxima de iteraciones de D, esto es, un σ para el cual D_{L+} ↾ Pred(σ) sea adecuado como jerarquía pero D_{L+} ↾ Pred(σ + ω) no lo sea. Puede probarse que no hay jerarquías máximas de ese tipo.[115]

Ahora sabemos que ninguna de las tres preocupaciones de revancha (la débil, la intermedia y la fuerte) estaban fundadas. A partir de la jerarquía de nociones D, no podemos generar una noción comprensible de hiperdeterminación. En particular, una jerarquía D_{L+}, luego de llegar a algún ordinal límite no definible en L^+, empieza a mapear toda oración en una falsedad; por esa razón, no es intuitivamente un operador de determinación.

Las únicas jerarquías adecuadas serán menos que máximas. Si tengo una jerarquía $\{D_{\alpha L+} \mid \alpha < \sigma\}$, siempre puedo cuantificar sobre los operadores en su rango. Llamar a una oración A 'hiperdeterminadamente verdadera', sería lo mismo que decir que, para todo $\alpha < \sigma$, '$D_{\alpha L+}$A' es verdadera. Pero de este modo, podemos definir mecánicamente una jerarquía mayor –la jerarquía $\{D_{\alpha L+} \mid \alpha < \sigma + \omega\}$–, esto es, un paso más en una jerarquía más larga que aún está en el lenguaje. Por lo cual tendremos consistencia.

Pero podemos considerar otra posibilidad: introducir la idea de un 'segmento inicial difuso' de la 'jerarquía' completa D_{L+}; en particular, el 'segmento inicial que consista en todos los ordinales que están en alguna jerarquía adecuada'. Esto se puede hacer de dos maneras:

$H_{\supset}$A: ∀α (α está en el dominio de una jerarquía adecuada ⊃ 'D_{aL+}A' es verdadero).

$H_{\rightarrow}$A: ∀α (α está en el dominio de una jerarquía adecuada → '$D_{\alpha L+}$A' es verdadero).

115. Field afirma que puede decir poco acerca de cuál sea el límite de las $L+$-definiciones, los L^+-caminos, y las L^+-jerarquías, porque todos estos asuntos son difusos. De todas formas, en Welch (2011) se discuten estos puntos y brindan mayores precisiones.

La l gica de la verdad.indd 228 04/07/2014 13:47:39

Ahora: con respecto a las condiciones deseables para un operador de determinación, sabemos que ningún operador D en el lenguaje puede satisfacer estas cuatro condiciones a la vez:

c	$\vDash DA \rightarrow A$	(D-elim)
d	$A \rightarrow \neg A \vDash \neg DA$	(D-reductio)
b	$A, \neg DA \vDash \bot$	(D-incoh)
Idem	$\vDash DA \rightarrow DDA$	(D-idem)

Para $H_{\supset}$, tanto (D-elim) como (D-reductio) son válidos, puesto que es válida la L^{+}-definibilidad de 1, y también lo es que $Tr`D_{1L+}A'$ es equivalente con DA, por lo cual el condicional $H_{\supset}A \rightarrow DA$ es válido. Por ende $H_{\supset}$ también. Dado que $H_{\supset}$ satisface (D-elim) y (D-reductio), la oración $H_{\supset}H_{\supset}M_1$ debe ser falsa (donde M_1 es el mentiroso correspondiente a $H_{\supset}$). $H_{\supset}M_1$, por otro lado, no puede valer 0. El argumento es parecido al que vimos al comienzo de este apartado.[116] Entonces, el operador $H_{\supset}$ no es idempotente. Por lo cual no ofrece ventajas respecto a los operadores D. Peor aún, para cualquier oración, $H_{\supset}A$ es como mucho difuso, por lo cual viola la condición (D-incoh). Respecto a $H_{\neg}$, parece suceder lo mismo, aunque no se ha probado aún.

Como conclusión: hemos visto que no tenemos ninguna concepción de un operador de hiperdeterminación que sea definible en L^{+}: lo más cerca que podemos estar es $H_{\supset}$ y $H_{\neg}$, que son definibles en L^{+}, pero no se comportan como debería hacerlo un operador de hiperdeterminación (en particular, porque falla idempotencia para ellos). La idea de que reflexionar sobre las jerarquías nos lleva a un concepto de hiperdeterminación que trasciende el lenguaje es simplemente una ilusión creada por la falla para apreciar que, si tratamos de cuantificar sobre todos los operadores de determinación definibles en el lenguaje, el rango de cuantificación es indeterminado.

116. Véase este argumento en Field (2006: sección 2).

La l gica de la verdad.indd 229 04/07/2014 13:47:39

Ejercicios para la sección 6

[1] Muestre que $|\mathsf{UM}| = |\mathsf{UC}| = 1$.

[2] Indique cómo se comportan las siguientes oraciones:

[2.1] Una oración A_1 que dice $\mathsf{DTr}\ulcorner A_1\urcorner \rightarrow \bot$.

[2.2] Una oración A_2 que dice $D_n\mathsf{Tr}\ulcorner A_2\urcorner \rightarrow \bot$ para un cierto ordinal finito *n*.

[2.3] Una oración A_3 que dice $\mathsf{DTr}\ulcorner A_3\urcorner \rightarrow (\mathsf{DTr}\ulcorner A_3\urcorner \rightarrow \bot)$.

[2.4] Compare el comportamiento de la oración A_3 con el de una oración A_4 que dice $(\mathsf{DTr}\ulcorner A_4\urcorner \wedge \mathsf{DTr}\ulcorner A_4\urcorner) \rightarrow \bot$.

7. Objeciones

7.1 ¿Es el condicional razonable?

No hay dudas de que los condicionales presentados en las secciones 2 y 5 constituyen un gran avance en relación con la situación del condicional de K_3. No obstante, es legítimo preguntarse si el condicional es suficientemente bueno, dado que aún hay una gran cantidad de principios clásicos que se pierden. Por supuesto, dada la transparencia del predicado veritativo, y dado que el condicional satisface *Modus Ponens*, sabemos que el condicional no puede satisfacer ciertos principios clásicamente válidos, entre ellos:

$A \rightarrow (A \rightarrow B) \nvDash A \rightarrow B$	(*Contracción*)
$\nvDash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$	(*Contracción*$_2$)
$\nvDash (A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$	(*Pseudo Modus Ponens*)

Si el condicional validara cualquiera de estos principios, la teoría sería inconsistente. Por ejemplo, si *(Contracción)* fuera una inferencia válida, podríamos llevar a cabo la siguiente prueba:

La l gica de la verdad.indd 230 04/07/2014 13:47:39

[1] $C \leftrightarrow (Tr`C' \rightarrow 2 \neq 2)$	Lema Diagonal
[2] $Tr`C' \rightarrow 2 \neq 2$	Contracción
[3] C	Modus Ponens
[4] $Tr`C'$	Transparencia de Tr(x)
[5] $2 \neq 2$	Modus Ponens

Pruebas similares pueden encontrarse si empleamos los otros dos principios mencionados arriba. Sin embargo, el problema es que no está claro que haya una motivación independiente de la necesidad de evitar las inconsistencias para invalidar estos principios. Eso hace que el condicional de la teoría tenga un cierto sabor *ad hoc*.

Más aún, la teoría de Field invalida otros principios y reglas que no conducen a inconsistencias, al menos no en sí mismos. Por ejemplo, las siguientes inferencias y principios no son válidos en la teoría de Field:

$A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow B) \nvDash (A_1 \wedge A_2) \rightarrow B$	(*Importación*)
$(A_1 \wedge A_2) \rightarrow B \nvDash A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow B)$	(*Exportación*)
$A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow B) \nvDash A_2 \rightarrow (A_1 \rightarrow B)$	(*Permutación*)
$\nvDash (A \supset B) \rightarrow (A \rightarrow B)$	(*Condicional material)*
$\nvDash (A \wedge \neg A) \rightarrow B$	(*Explosión*)

Si bien podría argumentarse que en ciertos casos la validación del principio (o regla) llevaría a una inconsistencia junto con otros principios (o reglas) plausibles,[117] no está del todo claro que esto pueda decirse en todos los casos. En particular, no pareciera suceder lo mismo con principios y reglas como (*Exportación*), (*Permutación*), (*Condicional material) o* (*Explosión*). Es decir, parece más bien una consecuencia indeseada que estas inferencias sean inválidas, más que un precio necesario a pagar para evitar contradicciones.

117. Por ejemplo, el lector puede constatar por sí mismo que si valiera (*Importación*) y tuviéramos la inferencia $A \vDash A \wedge A$, podríamos derivar $2 \neq 2$ a partir de $C \leftrightarrow (Tr`C` \rightarrow 2 \neq 2)$.

La l gica de la verdad.indd 231 04/07/2014 13:47:39

Field podría replicar que muchos de los *principios* inválidos no son indispensables porque la teoría los valida en forma de *reglas*. Por ejemplo, si bien (*Condicional material)* y (*Explosión*) no son válidos, sí tenemos $(A \supset B) \vDash (A \rightarrow B)$ y también $(A \wedge \neg A) \vDash B$. De hecho, al discutir la falla del Principio de Inducción en forma condicional, Field (2008) observa que "en la práctica, empleamos inducción en forma de regla, así que su falla en forma condicional tiene poco impacto" (la traducción nos pertenece).

Pero entonces pareciera haber una suerte de doble estándar por parte de Field a la hora de evaluar el poder del condicional. Por un lado, Field considera que no es suficiente tener un predicado veritativo que satisfaga Captura y Liberación en forma de reglas, sino que es indispensable tener todas las instancias del Esquema T. Por otro lado, en el caso de algunos condicionales no validados por la teoría, alcanza con tener las correspondientes reglas.[118]

En cualquier caso, de las observaciones anteriores se sigue que es posible que exista un condicional –compatible con una teoría donde $Tr(x)$ es transparente– más fuerte que los que hemos presentado en este capítulo. Esta es, hasta donde sabemos, una pregunta abierta.

7.2 Cuantificaciones restringidas

Una de las principales motivaciones conceptuales detrás de la teoría de Field es que la verdad no es más que un mero dispositivo lingüístico transparente que posibilita la expresión de generalizaciones. En particular, gracias a la presencia del predicado veritativo podemos expresar ideas como "Todos los teoremas de la aritmética son verdaderos" o "Todo lo que dijo Néstor es verdadero", entre otras. Pero nótese que éstas son generalizaciones restringidas, es decir, enunciados que contienen un condicional. Un claro problema entonces es que las debilidades del condicional también se convierten en debilidades relativas a las generalizaciones restringidas que la teoría es capaz de probar. Este problema es bastante serio. Si él único motivo para introducir un predicado veritativo en el lenguaje es darle

118. Field (2008: cap. 19) ha intentado motivar el rechazo de ciertos condicionales apelando a la distinción entre la aserción de un condicional y asertar condicionalmente (*the assertion of a conditional and conditional assertion*). Por razones de espacio no analizaremos esta estrategia (aunque diremos algo relacionado en la sección 7.3).

La l gica de la verdad.indd 232 04/07/2014 13:47:39

la capacidad de expresar ciertas generalizaciones, y si la teoría no es apta para expresar o representar el modo en que razonamos utilizando generalizaciones restringidas, entonces cabe preguntar qué sentido tiene introducir el predicado veritativo en el lenguaje.

A continuación presentamos un conjunto de leyes y reglas que involucran cuantificación restringida y que parecen deseables:

$\vDash \forall xAx \rightarrow \forall x(Bx \rightarrow Ax)$

$\vDash (Ao \wedge \forall x(Ax \rightarrow Bx)) \rightarrow Bo$

$\vDash (\forall x(Ax \rightarrow Bx) \wedge \forall x(Ax \rightarrow Cx)) \rightarrow \forall x(Ax \rightarrow (Bx \wedge Cx))$

$\vDash \forall x(Ax \rightarrow Bx) \rightarrow (\forall x(Cx \rightarrow Ax) \rightarrow \forall x(Cx \rightarrow Bx))$

$\vDash \neg\forall x(Ax \rightarrow Bx) \rightarrow \exists x(Ax \wedge \neg Bx)$

$\vDash \forall x(Ax \rightarrow Bx) \rightarrow \forall x(\neg Bx \rightarrow \neg Ax)$

$\vDash \forall x\neg Ax \rightarrow \forall x(Ax \rightarrow Bx)$

$\vDash \forall x(Ax \rightarrow Bx) \wedge \neg Bo \rightarrow \neg Ao.$

$\exists x(Ax \wedge \neg Bx) \vDash \neg\forall x(Ax \rightarrow Bx)$

$\forall xBx \vDash \forall x(Ax \rightarrow Bx)$

$\forall x(Ax \rightarrow Bx) \wedge Ao \vDash Bo$

Estos son sólo algunos ejemplos, la lista podría continuar. Desafortunadamente, dado que la teoría no valida, por ejemplo, $A \rightarrow (B \rightarrow A)$, tampoco validará $\forall xAx \rightarrow \forall x(Bx \rightarrow Ax)$. Y también, dado que la teoría no valida *Pseudo Modus Ponens*, tampoco validará $(Ao \wedge \forall x(Ax \rightarrow Bx)) \rightarrow Bo$.

Actualmente Field está desarrollando una teoría con dos condicionales (además del condicional material)[119]. Uno es el que hemos presentado más arriba, el otro, que representaremos por medio de $\Rightarrow$, pretende ser útil para expresar cuantificaciones restringidas. De este modo, en un enfoque con dos condicionales, es posible que la teoría valide principios mixtos como los siguientes (donde $A \Rightarrow B$ debe interpretarse como "Todos los As son Bs"):

119. Field recientemente ha publicado un artículo (2013) donde explica su posición sobre esta dificultad.

La l gica de la verdad.indd 233 04/07/2014 13:47:39

$\vDash (A \Rightarrow B) \rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

$\vDash [(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)] \rightarrow (A \Rightarrow B \wedge C)$

$\vDash (A \Rightarrow B) \rightarrow [(C \Rightarrow A) \rightarrow (C \Rightarrow B)]$

$\vDash B \rightarrow (A \Rightarrow B).$

$A \vDash (A \Rightarrow B) \rightarrow B$

Este enfoque aún tiene problemas, como el mismo Field reconoce. Sabemos que en una teoría con un solo condicional, donde $Tr(x)$ es transparente y el condicional valida *Modus Ponens*, no es posible tener $[(A \rightarrow B) \wedge Ao] \rightarrow Bo$ sin trivializar la teoría. Sin embargo, en un enfoque con dos condicionales podríamos aspirar a obtener por lo menos $[(A \Rightarrow B) \wedge Ao] \rightarrow Bo$. Sin embargo, no es posible tener este principio en la teoría sin rechazar este otro: $\forall x \neg Ax \rightarrow (A \Rightarrow B)$, el cual se sigue de $(A \Rightarrow B) \rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$, además de tener cierta plausibilidad intuitiva. El argumento es el siguiente. A partir de $[(A \Rightarrow B) \wedge Ao] \rightarrow Bo$ y de $\forall x \neg Ax \rightarrow (A \Rightarrow B)$ es posible obtener fácilmente $\forall x \neg Ax \wedge Ao \rightarrow Bo$. Pero supongamos que $A(x)$ es $x=x \wedge M$ y que $B(x)$ es $2 \neq 2$. Luego tenemos $\forall x \neg(x=x \wedge M) \wedge (2=2 \wedge M) \rightarrow 2 \neq 2$. Razonando clásicamente podemos obtener $\neg M \wedge M \rightarrow 2 \neq 2$. Y si vale contraposición, esto implica $M \wedge \neg M$. Luego, no es posible validar simultáneamente $[(A \Rightarrow B) \wedge Ao] \rightarrow Bo$ y $\forall x \neg Ax \rightarrow (A \Rightarrow B)$.

7.3 Otras paradojas

¿Acaso la teoría de Field resuelve todas las paradojas? Si bien es relativamente fácil observar que la teoría es capaz de lidiar adecuadamente con la paradoja de Montague, la paradoja del Conocedor,[120] y otras paradojas menos familiares que la del Mentiroso, algunos han sugerido que hay ciertas paradojas que escapan al enfoque paracompleto de Field. Mencionaremos dos en particular. En primer lugar, Graham Priest (2005) ha indicado que cierta versión del Conocedor no requiere el uso de Tercero Excluido ni de otras reglas rechazadas en el enfoque

120. La paradoja de Montague es la que surge de considerar una oración A_1 que dice que A_1 no es necesaria, y la paradoja del conocedor es la que surge de considerar una oración A_2 que dice que ningún agente en ningún momento conoce A_2.

La l gica de la verdad.indd 234 04/07/2014 13:47:39

paracompleto. Priest argumenta que el alcance del rechazo a la Ley de Tercero Excluido no puede ser tan amplio como el paracompleto pretende. El lenguaje L^+, por una cuestión de simplicidad, no incluye un predicado 'K' de conocimiento. Pero si se pretende que el enfoque paracompleto sea capaz de lidiar con todas las paradojas entonces debería en principio ser posible introducir un predicado de este tipo en L^+ sin que se genere una inconsistencia. Pero como L^+ es un lenguaje autorreferencial, existirá una oración que dice de sí misma que no es conocida, es decir, una oración B que dice ¬K'B'.[121] Si la teoría paracompleta pretende capturar apropiadamente el significado de esta oración, entonces deberá probar:

$B \leftrightarrow \neg K'B'$ (Lema Diagonal)

En cualquier interpretación posible del predicado K, está claro que K es factivo. Entonces vamos a tener el siguiente principio para cualquier fórmula A:

$K'A' \rightarrow A$ (Factividad)

Si además asumimos, como es usual en lógica epistémica, que estamos trabajando con agentes idealizados que conocen todas las cosas que pueden ser probadas, entonces también tenemos la siguiente regla:

Si $\vdash A$, entonces $\vdash K'A'$ (Necesitación)

No es difícil mostrar que bajo la lógica clásica estos tres hechos conducen a una contradicción. Veámoslo en detalle:

[1] $B \leftrightarrow \neg K'B'$	Lema Diagonal
[2] $K'B' \vee \neg K'B'$	LEM
[3] $K'B' \rightarrow B$	Factividad
[4] $K'B' \rightarrow \neg K'B'$	Transtividad

121. En general el predicado K(x) suele estar relativizado a un agente y a un momento temporal. Para evitar complicaciones asumiremos que tanto el agente como el momento temporal quedan fijos.

La l gica de la verdad.indd 235 04/07/2014 13:47:39

[5] $\neg K'B' \rightarrow \neg K'B'$	Identidad
[6] $\neg K'B'$	Razonamiento por casos
[7] B	Modus Ponens
[8] $K'B'$	Necesitación

Obviamente, los pasos [6] y [8] producen la inconsistencia. De cualquier forma está claro que el enfoque paracompleto bloquea la derivación en el segundo paso.[122] El defensor de este enfoque tiene razones para pensar que LEM no vale para $K'B'$.

Lo interesante del argumento de Priest es que muestra que rechazar LEM en el caso de $K'B'$ no es una salida suficiente, porque LEM puede ser derivada para esa instancia particular. Esto de todas formas no alcanza para concluir que LEM sea válido, porque sólo se la deriva para esa instancia particular –para $K'B'$–, y no en general. El verdadero problema, como se vio, es que de ahí se sigue una contradicción (estamos de vuelta en el escenario del Conocedor).[123] El argumento de Priest hace uso de las nociones de aceptación y rechazo utilizadas por Field. "Rechazar" es tener un grado de creencia menor que un umbral r y "aceptar" es tener un grado de creencia por encima de un umbral s. Field, entonces, rechaza, tanto $K'B'$ como $\neg K'B'$. Pero de este modo, es posible reintroducir LEM sin mucha dificultad a través del siguiente argumento (donde $C(A)$ representa el grado de creencia en lo expresado por la oración A):

[1] $C(K'B' \vee \neg K'B') < r$	rechazo de LEM
[2] $C(K'B') < r \,\&\, C(\neg K'B') < r$	de [1]
[3] $C(\neg B) < r \,\&\, C(B) < r$	de [2] y $B \leftrightarrow \neg K'B'$
[4] $C(B) < s$	asumiendo que $r < s$
[5] $\neg K'B'$	de [4]

122. Hay otros modos de derivar una inconsistencia $B \leftrightarrow \neg K'B'$ en los que en lugar de utilizar LEM, se emplea la regla *Reductio*. Sin embargo, el enfoque paracompleto tampoco valida irrestrictamente esta regla.

123. Y, como Field acepta explosión, finalmente se sigue la validez de LEM, en todas sus instancias (lo que tampoco es tan grave: el problema principal es que el sistema se vuelve trivial).

La l gica de la verdad.indd 236 04/07/2014 13:47:39

[6] K‘B’ ∨ ¬K‘B’ Introducción de la disyunción

Pero si [6] es derivable, entonces podemos llevar a cabo la prueba previa mostrando así que la teoría es inconsistente.

Otra paradoja que, según Priest, es potencialmente perjudicial para el enfoque paracompleto involucra la noción de aceptación racional. Las razones para extender el lenguaje con un predicado que represente dicha noción son, presumiblemente, las mismas que en el caso del predicado K(x) o el predicado Tr(x). Tomemos entonces un predicado RAC(x) que expresa la idea de que es racional aceptar x. Luego, existe una oración B tal que B es ¬RAC‘B’. Si la teoría es capaz de probar el Lema Diagonal, entonces la siguiente equivalencia será un teorema

B ↔ ¬RAC‘B’ (Lema Diagonal)

Además, es plausible suponer que el predicado RAC satisface el siguiente esquema para cualquier fórmula A del lenguaje:

¬RAC(‘A ∧ ¬RAC‘A’’) (Racionalidad)

Pero entonces vamos a poder derivar lo siguiente:

[1] ¬RAC(‘B∧¬RAC‘B’’) Instancia de (Racionalidad)

[2] ¬RAC‘B ∧ B’ Equivalencia entre B y ¬RAC‘B’

[3] ¬RAC‘B’ Equivalencia entre B y B ∧ B

[4] B Equivalencia entre B y ¬RAC‘B’[124]

Ahora bien, si asumimos que es racional aceptar todo lo que la teoría prueba, entonces podemos obtener

[5] RAC‘B’

Priest señala que, si bien podríamos tener dudas acerca de que en general sea racional creer todo lo que la teoría prueba, no parece haber motivos para dudar

124. Para simplificar el argumento hemos modificado ligeramente la formulación original de Priest.

La l gica de la verdad.indd 237 04/07/2014 13:47:39

de ello en este caso particular. La virtud de este argumento, para Priest, por sobre uno similar que Field (2008: 77-78) condsidera, es que no se apela nunca a LEM –en particular, a la instancia $B \vee \neg B$.

La segunda paradoja de la que hablaremos está vinculada a la noción de validez. Varios autores han sugerido recientemente que no es posible agregar consistentemente a una teoría paracompleta (ni a una paraconsistente) un predicado que represente la noción de validez (Beall y Murzi, 2011). Veamos por qué.

Sea VAL(x,y) un predicado diádico que expresa la idea de que y es implicado por x.[125] Consideremos una oración B que dice de sí misma VAL('B','2≠2'). Parece plausible decir que el predicado VAL satisface las siguientes condiciones:

Si $A_1 \vDash A_2$, entonces $\vDash$ VAL('A_1', 'A_2') (VAL-in)

A_1, VAL('A_1', 'A_2') $\vDash A_2$ (VAL-out)

El problema es que estas dos reglas conducen a una contradicción más o menos inmediata. Si la teoría es adecuada, deberá probar

$B \leftrightarrow$ VAL('B','2≠2') (Lema Diagonal)

Pero usando (VAL-in) y (VAL-out) es posible derivar una contradicción.

[1] B	Suposición
[2] Val(´B`,´2≠2`)	Modus Ponens
[3] 2≠2	VAL-out
[4] Val('B','2≠2`)	VAL-in
[5] B	Modus Ponens
[6] 2≠2	VAL-out

125. Por una cuestión de simplicidad, asumiremos que Val es un predicado que únicamente representa argumentos con una premisa. De cualquier modo, el predicado puede generalizarse fácilmente a casos con más de una premisa.

La l gica de la verdad.indd 238 04/07/2014 13:47:39

Obsérvese que en la derivación no se utilizó ni LEM, ni *Reductio*, ni Prueba Condicional. ¿Cómo resuelve Field esta paradoja? La solución de Field consiste en rechazar (VAL-out). Este principio establece que dada la verdad de A y la validez del argumento de A a B, podemos inferir la verdad de B. Con lo cual, lo que Field está rechazando es la idea de que todo argumento válido preserva verdad.[126]

Esta movida puede sonar un poco radical pero, según Field, hay una razón adicional e independiente de la paradoja de la validez para abandonar la idea de que todo argumento válido preserva verdad. Sea $\mathbb{T}$ una teoría aceptable para un lenguaje que contiene el predicado Tr(x) (el lector puede asumir que $\mathbb{T}$ es cualquiera de las versiones de la teoría paracompleta presentada en este capítulo). Consideremos ahora el siguiente argumento:

(1) Cada axioma de $\mathbb{T}$ es verdadero.

(2) Cada regla de inferencia de $\mathbb{T}$ preserva verdad

Por lo tanto,

(3) Todos los teoremas de $\mathbb{T}$ son verdaderos (es decir, $\mathbb{T}$ es una teoría correcta).

Ahora bien, es un resultado conocido que la corrección de una teoría implica su consistencia. Con lo cual, si hemos probado que $\mathbb{T}$ es una teoría correcta, entonces $\mathbb{T}$ es consistente. Además, nótese que el argumento de arriba puede ser formulado en la teoría $\mathbb{T}$, ya que $\mathbb{T}$ incluye su propio predicado veritativo. De esto se sigue, según Field, que $\mathbb{T}$ logra probar su propia consistencia, lo cual contradice el Segundo Teorema de Gödel, según el cual ninguna teoría razonable[127] puede probar su propia consistencia. Entonces, hay algún aspecto del razonamiento previo que no funciona. El punto de Field es que la premisa (2) es falsa, justamente porque la noción de validez no coincide con la noción de preservación de verdad. Obsérvese, además, que el argumento es sumamente

126. No consideraremos aquí la idea de suponer que LEM falla también para la noción de validez. El lector interesado puede encontrar una discusión de esta idea en Field (2008: 303-308).
127. Aunque mantendremos cierta ambigüedad con respecto a la idea de teoría razonable, es posible dar una caracterización rigurosa de los requisitos con los que una teoría debe cumplir para que se le aplique el Segundo Teorema de Gödel.

La l gica de la verdad.indd 239 04/07/2014 13:47:39

general. No se aplica solamente a la teoría paracompleta defendida por Field, sino a cualquier teoría de la verdad que satisfaga requisitos expresivos mínimos.

Independientemente de los méritos de este argumento, cabe destacar que la idea de que la noción de validez no coincide con la de preservación de verdad es una idea radical que va en contra de una larga tradición en filosofía de la lógica y es un precio que ciertas teoría de la verdad distintas de la paracompleta no están obligadas a pagar.[128]

7.4 ¿Es la teoría realmente inmune a las revanchas?

Aunque Field ha sugerido que su teoría es inmune a las revanchas, está claro que no es posible incorporar apropiadamente a la teoría de Field el predicado "tener valor designado". No obstante, la confusión surge de mezclar dos cuestiones crucialmente distintas. Por un lado, la idea de que existen nociones semánticas inteligibles tal que cierta paradoja se evita sólo gracias al hecho de que esas nociones no son expresables en el lenguaje, y por otro, la idea de que el lenguaje es capaz de caracterizar como defectuosa toda oración que merece esa caracterización.

Con respecto a esta última cuestión, la teoría de Field está a la altura del reclamo. Ya vimos que gracias al operador de determinación es posible definir un operador de patologicidad U, tal que para toda oración semánticamente defectuosa A de L^+ (esto es, toda oración A que no sea ni verdadera ni falsa) puede mostrarse que la teoría valida toda predicación apropiada de patologicidad a A: $|UA| = 1$. Por ejemplo, puede constatarse que $|UM| = |UH| = |UC| = 1$ y que $|U(2{\neq}2)| = |U(2{=}2)| = 0$.

Con respecto a la primera idea, cconsideremos el predicado *tener un valor último distinto de 1*. Si dicho predicado formara parte del lenguaje, podríamos construir una oración A que dice $|A| \neq 1$. Está claro que si agregamos este predicado a la teoría, dado que el Esquema T vale irrestrictamente, tenemos $Tr'|A| \neq 1' \leftrightarrow |A| \neq 1$. Pero esto precisamente muestra que el predicado $|x| \neq 1$ no significa tener

128. Existe una familia de soluciones subestructurales a las paradojas (que no se consideran en este libro) en las que o bien se rechaza *Contracción Estructural (*Zardini, 2011), o bien se rechaza la *Transtividad* de la noción de consecuencia (Cobreros *et. al.*, 2012a y 2012b; Ripley, 2012a, 2012b).

La l gica de la verdad.indd 240 04/07/2014 13:47:40

valor último distinto de 1. Otra manera de ver este mismo asunto es pensando en la noción de determinación. Sea A la oración A es falsa o determinadamente falsa *para alguna iteración del operador de determinación*. Si esta oración tuviera el significado que pretendemos que tenga, sería posible derivar fácilmente una inconsistencia. Por supuesto, justamente el hecho de que dicha inconsistencia no pueda ser derivada muestra que el predicado no tiene el significado intuitivo que le atribuimos.[129]

Otra forma de mostrar esta insuficiencia expresiva es pensando en la posibilidad de tener una negación exhaustiva. Beall (2009) ha sugerido que los enfoques paracompletos son inadecuados para representar el modo en que habitualmente utilizamos la negación porque la negación es utilizada aparentemente como un operador exhaustivo, en el sentido de que al no aceptar una oración A estamos comprometidos inmediatamente a aceptar su negación, es decir:

A	~A
1	0
0	1
½	1

El problema es que si tenemos una negación exhaustiva ~ junto con un predicado veritativo transparente, es posible construir un predicado ~Tr(x), distinto de ¬Tr(x), que expresa la idea de "no tener el valor designado". Sea A la oración ~Tr'A'. No es difícil ver que la oración A conduce a una inconsistencia.

Dado que las teorías paracompletas admiten gaps, puede ocurrir que no se acepte A (porque por ejemplo su valor es ½) sin que esto conduzca a la aceptación de su negación. Por ende, los defensores del enfoque paracompleto deben dar una explicación de por qué la negación del lenguaje cotidiano tiene cierta apariencia de exhaustividad que desaparece cuando consideramos la negación paracompleta.

Una réplica a esta objeción puede encontrarse en Field (2008: 309-312). Hay otras objeciones a la teoría de Field que no hemos podido tratar en este capítulo por cuestiones de espacio. Intentaremos mencionarlas brevemente. Greg Restall (2007) ha sugerido que existen paradojas que afectan a la teoría paracompleta

129. Con respecto a esta oración, uno puede ver toda la sección 6 de este capítulo como un sofisticado argumento a favor de la idea de que la noción de determinación en un sentido absoluto (i.e. no relativizada a un ordinal) no es inteligible.

La l gica de la verdad.indd 241 04/07/2014 13:47:40

si dicha teoría está formulada en un lenguaje que admite disyunciones infinitas. Podemos encontrar una réplica en Field (2008: 316-324). Rayo y Welch (2007), por su parte, han argumentado que sólo por medio de la incorporación de recursos expresivos de orden superior es posible representar en la teoría de Field la idea de "tener valor último 1 en el mundo real" y no solamente tener valor último 1 relativamente a un modelo donde los cuantificadores se encuentran restringidos. La réplica se encuentra en Field (2008: 340-343). Una tercera cuestión tiene que ver con la idea de que la iteración indefinida de operadores de determinación trae aparejados (algunos o todos) los problemas típicos de los enfoques jerárquicos acerca de la verdad. Field (2008: 347-351) responde a esta crítica. Se ha sugerido también que otra presunta debilidad del enfoque paracompleto es que separa de manera irreconciliable la idea de negación de la idea de rechazo. Por ejemplo, el defensor del enfoque paracompleto estará de acuerdo en que hay que rechazar M, pero la teoría no prueba ¬M. Si creemos que la teoría de la probabilidad debe explicar el comportamiento de aceptación y rechazo de los agentes, entonces esto conduce forzosamente a la modificación de la teoría clásica de la probabilidad. Dado que en ciertos casos rechazamos tanto una oración A como su negación, la teoría de la probabilidad debe dejar lugar a la posibilidad de que la probabilidad de A sumada a la probabilidad de la negación de A sea menor a 1.

Ejercicios para la sección 7

[1] Muestre que los principios (y reglas) mencionados en 7.1 son inválidos o válidos según sea el caso.

[2] Piense por qué la paradoja de la validez discutida en 7.3 no surge si Val(x,y) representa la noción de validez estrictamente lógica.

[3] Piense por qué en un enfoque en el cual los valores designados son 1 y ½ (en lugar de solamente 1) la negación exhaustiva no conduce a la trivialización de la teoría.

[4] ¿Considera que el argumento de Nixon-Watergate puede formularse en contra de la jerarquía de operadores de determinación de la teoría de Field?

La l gica de la verdad.indd 242 04/07/2014 13:47:40

8. Conclusión

En nuestra opinión la teoría de Field tiene un conjunto de virtudes que ninguna de las teorías presentadas anteriormente en este libro tiene, al menos no conjuntamente. Mencionaremos las tres que nos parecen más importantes. En primer lugar, además de hacer que Tr'A' y A sean intersustituibles *salva veritate*, la teoría valida todas las fórmulas de la forma Tr'A' ↔ A, incluso aquellas en las que A es una oración paradójica. Ninguna de las teorías presentadas anteriormente, ni la teoría tarskiana de la verdad, ni la teoría paracompleta de Kripke, ni la teoría de la revisión, tienen esta característica. En segundo lugar, la teoría no tiene las limitaciones expresivas que comparten todas las teorías recién mencionadas. En particular, es posible caracterizar apropiadamente en el lenguaje de la teoría muchas de sus propias nociones semánticas sin caer en una contradicción. Por eso, Field ha insinuado que su teoría es inmune a las revanchas. Como ya hemos sugerido, quizás esto último sea discutible, pero de cualquier modo no deja de ser cierto que es posible dar una caracterización semántica exhaustiva de todas las oraciones de la teoría dentro de la teoría utilizando el operador de determinación. En tercer lugar, la teoría contiene un condicional →, distinto del condicional material, muy razonable en términos de las inferencias y principios que resultan validados. Es más, el condicional → tiene una lógica muy similar a la del condicional material ⊃ y de hecho es idéntico a ⊃ en contextos donde vale LEM.

La l gica de la verdad.indd 243 04/07/2014 13:47:40

Apéndice: Un condicional razonable

¿Qué principios debe satisfacer un condicional para ser razonable? Siguiendo a Beall (2009), diremos que un condicional → es razonable si satisface por lo menos las siguientes desiderata:

(1) $\vDash A \to A$ *(Identidad)*

(2) $A, A \to B \vDash B$ (*Modus Ponens*)

(3) El condicional no valida ciertos principios de contracción[130] que, junto con *Modus Ponens* y la transparencia de $Tr(x)$, generan paradojas como la de Curry.

Por supuesto, el condicional de Field satisface (1)-(3) y en ese sentido es un condicional razonable. Es más, daremos aquí una lista de algunos de los principios y reglas vinculados al condicional que valida y no valida la teoría de Field. El sistema de Field valida los siguientes principios y reglas, entre otros:

$A, A \to B \vDash B$ (*Modus Ponens*)

$A, \neg B \vDash \neg(A \to B)$ (*Herradura Negativa*)

$A \supset B \vDash A \to B$ (*Herradura Positiva*)

$A_1 \to A_2, A_2 \to B \vDash A_1 \to B$ (*Transitividad*$_1$)

$A_1 \to A_2 \vDash (A_2 \to B) \to (A_1 \to B)$ (*Transitividad*$_2$)

$A_1 \to A_2 \vDash (B \to A_1) \to (B \to A_2)$ (*Transitividad*$_3$)

$\vDash A \to A$ (*Identidad*)

$\vDash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ (*Contraposición*)[131]

$\vDash (A_1 \to A_2) \to ((A_1 \wedge B) \to (A_2 \wedge B))$ *(Conjunción)*

$\vDash (A_1 \to A_2) \to ((A_1 \vee B) \to (A_2 \vee B))$ *(Disyunción)*

$\vDash \neg(A \to B) \to (B \to A)$ (*Conectividad*)

$\vDash A \to (A \vee B)$ (*Introducción de la Disyunción*)

130. Por ejemplo *(Pseudo Modus Ponens)*, *(Contracción)*, y *(Contracción2)*.

131. Obviamente, vale también su conversa: $\vDash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

La l gica de la verdad.indd 244 04/07/2014 13:47:40

$\vDash (A \wedge B) \rightarrow A$ (*Eliminación de la Conjunción*)[132]

$\vDash (A_1 \wedge (A_2 \vee B)) \rightarrow ((A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge B))$ (*Distribución*)

En la lista de arriba omito varias inferencias que son válidas en la teoría de Field, ya que está claro que si vale el condicional asociado de cierta inferencia, vale la inferencia. Por ejemplo, dado que $\vDash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$, obviamente también tenemos $A \rightarrow B \vDash \neg B \rightarrow \neg A$. Si bien es cierto que el Teorema de la Deducción falla,[133] la falla es siempre "de izquierda a derecha". Una cierta inferencia puede preservar valor designado sin que su condicional asociado tenga valor designado. Pero siempre que el condicional asociado de una cierta inferencia tenga el valor designado, la inferencia preserva el valor designado.

Pese a ser razonable en el sentido introducido más arriba, el condicional no valida varios principios clásicamente válidos, entre otros:

$A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow B) \nvDash (A_1 \wedge A_2) \rightarrow B$ (*Importación*)

$(A_1 \wedge A_2) \rightarrow B \nvDash A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow B)$ (*Exportación*)

$A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow B) \nvDash A_2 \rightarrow (A_1 \rightarrow B)$ (*Permutación*)

$A \rightarrow (A \rightarrow B) \nvDash A \rightarrow B$ (*Contracción*)

$\nvDash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (*Paradoja Positiva)*

$\nvDash (A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ (*Pseudo Modus Ponens*)

$\nvDash A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$ (*Pseudo Modus Ponens*$_2$)

$\nvDash (A \supset B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ (*Condicional material)*

$\nvDash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$ (*Contracción*$_2$)

$\nvDash (A \wedge \neg A) \rightarrow B$ (*Explosión*)

Está claro que los contraejemplos a estas inferencias y principios involucran de manera esencial al predicado veritativo. En otras palabras, en contextos donde el predicado veritativo está ausente o, lo que en este enfoque es lo mismo, en contextos donde vale el Principio de Tercero Excluido, el nuevo condicional

132. Por supuesto, también tenemos: $\vDash B \rightarrow (A \vee B)$ y $\vDash (A \wedge B) \rightarrow B$.

133. El Teorema de la Deducción establece que $\Gamma, A \vDash B$ si y sólo si $\Gamma \vDash A \rightarrow B$.

La l gica de la verdad.indd 245 04/07/2014 13:47:40

se comporta exactamente como el condicional material definible en K_3. Por ejemplo, si bien es cierto que $\not\models (A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$, sí tenemos $A \vee \neg A, B \vee \neg B \models (A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$.

Bibliografía

Beall, J.C. (ed.) (2003): *Liars and Heaps*, Oxford, Oxford University Press.

— (2006): "True, Falsa, Paranormal", en *Analysis*, 66 (2): 102-114.

— (2007): *Revenge of the Liar*, Oxford, Oxford University Press.

— (2008) "Curry's paradox", en Zalta, E. N. (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

— (2009): *Spandrels of Truth*, Oxford, Clarendom Press.

Beall, J.C. y Armour-Garb, B. (eds.) (2005): *Deflationism and Paradox*, Oxford, Oxford University Press.

Beall, J.C. y Murzi, J. (2013): "Two Flavors of Curry´s Paradox", en *The Journal of Philosophy*, disponible online en: www.academia.edu.

Cobreros, P.; Egré, P.; Ripley, D. y Van Rooij, R. (2013): "Reaching Transparent Truth", en *Mind*, disponible online en: staff.science.uva.nl.

— (2012a): "Tolerance and Mixed Consequence in the S'valuationist Setting", en *Studia Logica*.

— (2012b): "Tolerant, Classical, Strict", en *Journal of Philosophical Logic*, 41(2): 347-385.

Field, H. (2002): "Saving the Truth Schema from Paradox," en *Journal of Philosophical Logic*, 31: 1-27.

— (2003): "A Revenge-Immune Solution to the Semantic Paradoxes," en *Journal of Philosophical Logic*, 32: 139-177.

— (2005): "Variations on a Theme by Yablo", en Beall, J. C. y Armour-Garb, B. (eds.), *Deflationism and Paradox*, Oxford, Oxford University Press, pp. 53-74.

— (2006): "Truth and the unprovability of consistency", en *Mind*, 115: 567-605.

— (2007): "Solving the Paradoxes, Escaping revenge", en Beall, J. C. (ed.), *Revenge of the Liar*, Oxford, Oxford University Press.

— (2008): *Saving Truth From Paradox*, Oxford, Oxford University Press.

La l gica de la verdad.indd 246 04/07/2014 13:47:40

—(2013): Naive truth and restricted cuantification: saving truth a whole lot better, *Review of symbolic logic, (en prensa)*.

Gupta, A. y Belnap, N. (1993): *The Revision Theory of Truth*, Cambridge, MIT Press.

Kripke, S. (1975): "Outline of a Theory of Truth", en *Journal of Philosophy*, 72: 690-716.

Leitgeb, H. (2007): "On the Metatheory of Field's 'Solving the Paradoxes, Escaping

Revenge'", en Beall, J. C. (ed.), *Revenge of the Liar*, Oxford, Oxford University Press, pp. 159-183.

Priest, G. (2005): "Spiking the Field Artillery", en Beall, J. C. y Armour-Garb, B. (eds.), *Deflationism and Paradox*, Oxford, Oxford University Press, pp. 41-52.

— (2007): "Revenge, Field and ZF", en Beall, J. C. (ed.), *Revenge of the Liar*, Oxford, Oxford University Press.

Rayo, A. y Welch, P. (2007): "Field on Revenge", en Beall, J. C. (ed.), *Revenge of the Liar*, Oxford, Oxford University Press, pp. 234-249.

Restall, G. (2007): "Curry's Revenge: the Costs of Non-Classical Solutions to the Paradoxes of Self-Reference", en Beall, J. C. (ed.), *Revenge of the Liar*, Oxford, Oxford University Press, pp. 262-271.

Ripley, D. (2012a): "Conservatively extending classical logic with transparent truth", en *Review of Symbolic Logic*.

— (2012b): "Paradoxes and failures of cut", en *Australasian Journal of Philosophy*.

Smith, P. (2010): "Field on truth: how complex is too complex", disponible online en <www.logicmatters.net>.

Yablo, S. (2003): "New grounds for naïve truth theory", en Beall, J. C. (ed.), *Liars and Heaps*, Oxford, Oxford University Press, pp. 312-330.

Welch, P. (2011): "Truth, Logical Validity and Determinateness: a Commentary on Field's *Saving Truth from Paradox*", en *The Review Of Symbolic Logic*, 4 (3).

Zardini, E. (2011): "Paradox without contra(di)ction", en *The review of symbolic logic*, 4 (5): 498-535.

Bibliografía comentada

Para una introducción amena a distintas formulaciones de la paradoja de Curry (y a sus posibles soluciones) recomendamos Beall (2008). Una presentación no

La l gica de la verdad.indd 247 04/07/2014 13:47:40

del todo informal de los contenidos de las secciones 2 y 3 puede encontrarse en Field (2008: caps. 15, 16 y 17) y también en Field (2002). Las quejas de Yablo ante el condicional de Field (sección 4) están en Yablo (2003) y las correspondientes réplicas de Field (sección 5) pueden encontrarse en Field (2008: cap. 17, sección 17.5) y también en Field (2005). La compleja discusión en torno al operador de determinación y las revanchas (sección 6) puede hallarse en Field (2003 y 2007), y también, aunque desde un enfoque menos formal, en Field (2008: cap. 22). El lector interesado en la discusión de la sección 7.1 puede ver Field (2008: cap. 19) y Smith (2010). No hay demasiado escrito sobre el contenido de la sección 7.2, pero dos excepciones son Field (2013) y Beall (2009: cap. 5). Los problemas señalados en la sección 7.3 se originan en Priest (2005). Un texto relevante aquí también es Field (2006). La sección 7.4 está basada fundamentalmente en Priest (2007) y Beall (2009). Los interesados en otras objeciones a la teoría de Field y en las respuestas que el mismo autor ha dado pueden consultar Field (2008: caps. 19, 20, 21, 23).

La l gica de la verdad.indd 248 04/07/2014 13:47:40

Capítulo 5
Dialeteísmo: una teoría contradictoria de la verdad

Diego Tajer

En este capítulo, presento las dos teorías más influyentes dentro de la familia del dialeteísmo. Éstas son las defendidas por Graham Priest (2006a) y J.C. Beall (2009). Primero introduciré el sistema lógico LP, sobre el cual ambas teorías están basadas, en distintas formulaciones. En segundo lugar, exploraré algunas de sus propuestas para agregar un condicional adecuado a LP, y evaluaré los problemas que se les presentan. Más adelante, describiré las dos teorías de la verdad y mostraré la no-trivialidad de BXTT, la teoría de Beall. Luego, ahondaré en la discusión sobre las motivaciones filosóficas del dialeteísmo. Finalmente, analizaré las principales objeciones que se le han hecho a estas propuestas, y las posibles maneras de responder a ellas.

1. Introducción

Las teorías de la verdad vistas en los capítulos anteriores (excepto, quizás, la de Gupta y Belnap), intentan resolver las paradojas semánticas. Es decir, intentan proveer teorías de la verdad que eviten resultados indeseables, como las contradicciones. Como el mismo Tarski estableció, no podemos sostener una

La l gica de la verdad.indd 249 04/07/2014 13:47:40

teoría consistente y lógicamente clásica donde este esquema esencial a la verdad valga de manera irrestricta:

(Esquema T) Tr('A') si y sólo si A

Según la visión tradicional, el sentido de las teorías de la verdad es lograr teorías consistentes que se parezcan en la mayor medida posible a esta teoría inocente cuya inexistencia Tarski probó. Las propuestas de Field y Kripke buscan retener ese principio y modificar la lógica, mientras que la de Tarski busca retener la lógica clásica y modificar el Esquema T de una manera razonable. En todos esos casos, se busca que la teoría resultante sea consistente. En eso parece consistir una solución a las paradojas. Sin embargo, la búsqueda de consistencia, tan obvia como parece, puede cuestionarse. ¿Quién dijo que una teoría razonable sobre la verdad no puede tener dos fórmulas A y ¬A como teoremas? En realidad, la principal razón por la cual la consistencia fue generalmente un requisito indiscutido es que las lógicas más populares, la clásica y la intuicionista, adoptan un principio lógico muy tradicional, según el cual de una contradicción se sigue cualquier fórmula:

(Explosión) A, ¬A ⊨ B

Esto implica que una teoría contradictoria es una teoría trivial, por lo cual la consistencia de una teoría es indispensable.

El principio de Explosión, sin embargo, no está fuera de disputa. De hecho, hay una familia de lógicas que declaran inválido a ese principio: llamamos a esos sistemas *lógicas paraconsistentes*. Hay muchos motivos para cuestionar Explosión, por lo cual la paraconsistencia no es una posición comprometida con una visión filosófica particular, sino que tiene muchas variantes.

Una primera razón para rechazar Explosión es que permite inferencias donde las premisas no tienen ninguna relación, a nivel de contenido, con la conclusión. Por ejemplo: "Llueve. No llueve. Por lo tanto, Hamlet era marciano". Las *lógicas relevantistas* son las que piden a una inferencia cierta relación de contenido entre premisas y conclusión; eso las convierte, obviamente, en paraconsistentes. Vale notar que el relevantismo tiene un problema serio en explicar a qué se refieren con "relación de contenido entre premisas y conclusión". Cada lógica relevantista da una explicación de ese fenómeno, pero es difícil ver su cercanía con nuestra noción intuitiva de relevancia informativa. Un hecho problemático es que

La l gica de la verdad.indd 250 04/07/2014 13:47:40

Explosión se deriva de otras reglas que parecen no tener problemas visibles de relevancia entre premisas y conclusión (el silogismo disyuntivo y la introducción de la disyunción).[134] Obviamente, los lógicos relevantistas se detuvieron en el asunto e intentaron dar explicaciones de por qué alguna de esas reglas falla.[135] No me detendré en ese tema, aunque recomiendo bibliografía al final del capítulo.

Otra razón para rechazar Explosión, que nos interesa mucho más en este capítulo, es que *algunas contradicciones son verdaderas*. Esta posición es conocida como *dialeteísmo*. El dialeteísmo puede bien retener la noción de consecuencia lógica como transmisión de verdad. Explosión simplemente falla porque algunas oraciones son verdaderas y falsas a la vez; llamamos a estas oraciones *dialeteias*. En ese sentido, dos oraciones A y ¬A pueden ser verdaderas sin que B lo sea, lo que obviamente invalida Explosión. La pregunta del millón, obviamente, es: ¿qué oraciones son verdaderas y falsas a la vez, y por qué?

El caso paradigmático es la oración del mentiroso. Como sabemos, esa oración dice "Esta oración es falsa". Si es verdadera, es falsa. Por ende, es falsa. Pero esto la hace verdadera. El dialeteísta se detiene aquí, antes del grito de horror que lleva a los demás filósofos a buscar soluciones. La verdadera moraleja de este asunto, dice el dialeteísta, es que la oración es verdadera y falsa a la vez. De este modo, no se trata de buscar soluciones sino de aceptar el resultado paradójico tal como es. La virtud principal del dialeteísmo es que va por todo. Es decir, busca una teoría con el esquema T irrestricto. Y está dispuesto a pagar el precio: es decir, aceptar contradicciones.

La oración del mentiroso es uno de los pocos casos indiscutidos de dialeteias para los que aceptan contradicciones verdaderas. Otros casos comunes son las paradojas reforzadas, como "esta oración no es verdadera", o incluso paradojas conjuntistas como "el conjunto de Russell pertenece a sí mismo". Uno puede sostener, como Beall (2009), que sólo oraciones con vocabulario y contenido

134. Es sencillo derivar B de A ∧ ¬A a partir de esas reglas. Si tenemos A ∧ ¬A, podemos sacar A por ∧-elim e introducir mediante ∨-intro A∨B. Con ¬A y A∨B, a partir del silogismo disyuntivo, podemos obtener B.

135. En particular, Read (1988) argumenta que la falla de relevancia se explica a partir de la introducción de la disyunción. El hecho de que "llueve" sea verdadero implica que "llueve o Dios existe" lo es, pero en un sentido muy débil de la disyunción. En particular, no tiene el sentido fuerte que solemos darle en el lenguaje natural, esto es, que la falsedad de algún disyunto establece la verdad del otro (por ejemplo, cuando decimos "iremos al cine o al teatro"). Por eso el silogismo disyuntivo no vale en este caso.

La l gica de la verdad.indd 251 04/07/2014 13:47:40

semántico pueden ser dialeteias. Sin embargo, el fundador del dialeteísmo, G. Priest (2006a), va mucho más allá. Como veremos más adelante, él sostiene que ciertas oraciones con contenido metafísico, como "el vaso está roto" o "estoy en casa", y ciertas oraciones con contenido matemático, como "el conjunto de Russell no pertenece a sí mismo", son también dialeteias.

En este capítulo, analizaremos la estrategia dialeteísta. Tomaremos como principal referencia al texto fundacional de G. Priest, *In contradiction* (1987), aunque con sus modificaciones de la segunda edición (2006b). Sin embargo, también nos detendremos en la teoría dialeteísta más contemporánea, la que J.C. Beall (2009) presenta en *Spandrels of truth*. En la sección 2, describiré la lógica dialeteísta (LP) en distintas variantes y señalaré algunos de sus problemas. En la sección 3, me detendré en la caracterización que Priest y Beall hacen del condicional; en ambos casos, se revisa el condicional material y se reemplaza por un condicional más fuerte. En la sección 4, describiré y evaluaré las respectivas teorías de la verdad dialeteístas. En 5, examinaré brevemente las variantes filosóficas de esta teoría, que debaten sobre el alcance de las verdades contradictorias. Finalmente, en 6 me ocuparé de las principales objeciones que se le han realizado al dialeteísmo, en particular respecto a su capacidad o no de lograr un lenguaje semánticamente cerrado.

Ejercicio 1. A diferencia de los dialeteístas, que consideran verdaderas y por ende posibles a ciertas contradicciones, los relevantistas suelen considerarlas imposibles. Sin embargo, ambos rechazan inferencias como *Ex falso*. ¿Puede decir el relevantista que su noción de consecuencia lógica, a diferencia de la tradicional, consiste en la preservación de verdad en mundos tanto posibles como imposibles?

2. LP como sistema lógico

El dialeteísmo no propone una teoría extraña de la verdad sobre la base de la lógica clásica (en esto se diferencia de propuestas como KF, explicadas en el

La l gica de la verdad.indd 252 04/07/2014 13:47:40

capítulo sobre Kripke). Por el contrario, como señalé en la introducción, aquí se busca una reforma de la lógica desde sus principios más básicos, como Explosión o Silogismo Disyuntivo.

Lo más importante de esta lógica es que admite oraciones verdaderas y falsas al mismo tiempo. A diferencia de FDE, que es una lógica paraconsistente con cuatro valores de verdad,[136] aquí no se admiten vacíos de verdad,[137] por lo cual el principio de tercero excluido $(A \vee \neg A)$ resulta válido. Hay diversas maneras de plantear la semántica dialeteísta, y aquí me detendré en tres de ellas, equivalentes entre sí.

La primera formulación es de Priest (2006b). En algún sentido seguirá habiendo sólo dos valores de verdad, 0 y 1, aunque la función valuación V va del conjunto de oraciones al conjunto potencia de $\{0,1\}$ sin el conjunto vacío, es decir:

$$V: \quad \text{Oraciones del lenguaje} \rightarrow \{\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$$

Como puede adivinarse, una oración que valga $\{0,1\}$ será una dialeteia. En lógica clásica, las cláusulas semánticas son sencillas: uno simplemente aclara cuándo una oración es verdadera, y en el resto de los casos será falsa. Pero aquí ya no podemos describir los conectivos de esa manera. Esto se debe a que las condiciones de verdad no serán incompatibles con las condiciones de falsedad: algunas oraciones cumplirán con ambas. Por ende, plantearemos para cada conectivo

136. Para una introducción a FDE, que también puede servir como introducción a LP, véase Priest (2008).

137. Los vacíos de verdad son ciertamente un tópico complicado para los dialeteístas. En general, si bien ellos están comprometidos con la ley del tercero excluido, en general no creen que esto sea una parte esencial de su teoría. De hecho, la formulación de la posición dialeteísta ("hay contradicciones verdaderas") es independiente de la existencia o no de vacíos de verdad. La manera que tienen los dialeteístas de fundamentar la inexistencia de vacíos de verdad es bastante tradicional. En el caso de Priest, considera que si ningún hecho hace verdadera a cierta oración, entonces esa oración es falsa (Priest, 2006b), y si un hecho la hace verdadera, entonces es verdadera. También puede suceder que cierto hecho haga a una oración falsa. En cualquier caso, toda oración será naturalmente verdadera o falsa (o ambas cosas). En el caso de Beall (2009) la fundamentación del tercero excluido es menos comprometida metafísicamente, e incluso el autor admite que podría conceder el punto y admitir vacíos de verdad sin que su posición general cambie sustancialmente.

La l gica de la verdad.indd 253 04/07/2014 13:47:40

no sólo sus condiciones de verdad, sino también las de falsedad (dejaremos el condicional para el próximo apartado).

$1 \in V(A \wedge B)$ sii $1 \in V(A)$ y $1 \in V(B)$

$0 \in V(A \wedge B)$ sii $0 \in V(A)$ o $0 \in V(B)$

$1 \in V(\neg A)$ sii $0 \in V(A)$

$0 \in V(\neg A)$ sii $1 \in V(A)$

$1 \in V(A \vee B)$ sii $1 \in V(A)$ o $1 \in V(B)$

$0 \in V(A \vee B)$ sii $0 \in V(A)$ y $0 \in V(B)$

Descritas las cláusulas de los conectivos, queda establecer el criterio de validez. Aquí también se trata de preservación de verdad en toda valuación, sólo que debemos plantearlo de una manera distinta, ya que la verdad de las oraciones no excluye su falsedad. Nos concentraremos entonces en las valuaciones que le asignan $\{0\}$ o $\{0,1\}$ a todas las premisas; si allí sucede que la conclusión vale $\{0\}$ o $\{0,1\}$, entonces el argumento es válido. Dicho formalmente:

(Validez) El argumento con premisas P y conclusión C es válido sii para todas las valuaciones V tales que $1 \in V(S)$ para cualquier $S \in P$, también sucede que $1 \in V(C)$.

Por ende, Explosión $(A, \neg A \vDash C)$ fallará. Usaremos como contrajemplo el argumento $p, \neg p \vDash q$. Sea V una valuación que le asigna $\{0,1\}$ a p y $\{0\}$ a q. Dadas las cláusulas de la negación, V también le dará $\{0,1\}$ a $\neg p$. Por lo tanto, ambas premisas serán verdaderas (aunque también falsas), y la conclusión será simplemente falsa, lo que hace al argumento inválido.

Cuando extendemos el lenguaje y agregamos cuantificadores, no aparecen demasiadas novedades. Tendremos un esquema tradicional, con un modelo $M=<D,I,V>$.Pero presiviblemente, aquí la interpretación de los predicados será distinta: a cada predicado n-ario P, se le asigna un par $<P+,P->$, donde $P+$ es la extensión del predicado, y $P-$ es su antiextensión (obviamente, tanto $P+$ como $P-$ contienen n-tuplas de objetos del dominio). En un modelo clásico no hacía falta aclarar la antiextensión del predicado n-ario P, puesto que ella era $D^n - I(P)$,

La l gica de la verdad.indd 254 04/07/2014 13:47:41

es decir, todas las n-tuplas que no estuvieran en la extensión. Pero aquí habrá n-tuplas que forman parte tanto de la extensión como de la anti-extensión de los predicados. La valuación para fórmulas atómicas es, por ende, distinta.

Sea s una función de asignación que da objetos del dominio a las variables. Sea t[M,s] el valor que le asigna s a t bajo el modelo M; V(A,M,s) es el valor de verdad de A en el modelo M bajo la asignación s; y s[x/o] es la asignación idéntica a s excepto en que asigna el objeto o a x:

$1 \in V(Pt_1 \ldots t_n, M, s)$ sii $<t_1[M,s], \ldots, t_n[M,s]> \in P+$

$0 \in V(Pt_1 \ldots t_n, M, s)$ sii $<t_1[M,s], \ldots, t_n[M,s]> \in P-$

Por otro lado, los cuantificadores se definen de la siguiente manera:

$1 \in V(\forall xA, M,s)$ sii $1 \in V(A,M,s[x/o])$ para todo $o \in D$

$0 \in V(\forall xA, M,s)$ sii $0 \in V(A,M,s[x/o])$ para algún $o \in D$

$1 \in V(\exists xA, M,s)$ sii $1 \in V(A,M,s[x/o])$ para algún $o \in D$

$0 \in V(\exists xA, M,s)$ sii $0 \in V(A,M,s[x/o])$ para todo $o \in D$

Una manera más sencilla de plantear las cláusulas de verdad dialeteístas es apelar a un tercer valor de verdad, N.[138] Si hacemos esto, podemos simplemente usar las tablas de verdad de K3:

A	¬A
1	0
0	1
N	N

∧	1	0	N
1	1	0	N
0	0	0	0
N	N	0	N

∨	1	0	N
1	1	1	1
0	1	0	N
N	1	N	N

Sin embargo, a diferencia de K3, aquí el conjunto de valores designados ya no será {1}, sino {1,N}; es decir, el valor intermedio también será designado:

(Validez*)

138. En general, el valor N es llamado B (por "both") o I.

La l gica de la verdad.indd 255 04/07/2014 13:47:41

El argumento con premisas P y conclusión C será válido sii para toda valuación V tal que V(S)= 1 o N para cualquier oración S ∈ P, sucede que V(C) es 1 o N.

Probemos entonces que el silogismo disyuntivo (¬A, A ∨ B ⊨ B) falla. Daremos como contraejemplo el argumento ¬p, p ∨ q ⊨ q . Podemos hacer una tabla de verdad que dé cuenta de todas las valuaciones posibles. Dado que aquí hay tres valores, una tabla de verdad con n letras proposicionales tendrá 3^n filas:

p	q	p ∨ q	¬p	
1	1	1	0	
0	1	1	1	*
N	1	1	N	*
1	0	1	0	
0	0	0	1	
N	0	N	N	*!
1	N	1	0	
0	N	N	1	*
N	N	N	N	*

Marcamos con asterisco las filas donde las premisas tienen todas un valor designado. Como puede verse, en la tercera fila marcada (enfatizada con un signo de admiración), donde V(p)=N y v(q)=0, ambas premisas tienen el valor N, que es designado, mientras que la conclusión tiene el valor 0. Por ende, el argumento es inválido.

Otra característica de LP que la diferencia de K3 (además de la diferencia en valores designados) es que, mientras el segundo sistema no validaba ninguna oración, sino que sólo validaba reglas, LP valida tanto reglas como oraciones, y en particular, valida todas las oraciones de la lógica clásica. Por ejemplo, veamos cómo LP valida al tercero excluido:

A	¬A	A ∨ ¬A
1	0	1
0	1	1
N	N	N

En todos los casos, A ∨ ¬A tiene un valor designado. Lo mismo podemos hacer con cualquier oración válida de la lógica clásica (¡incluida la ley de no contradicción, ¬ (A ∧¬A)!). Desde ya, eso no sucede con las reglas clásicas, que fallarán en muchos casos (el ejemplo más fácil es Explosión).

La l gica de la verdad.indd 256 04/07/2014 13:47:41

Volviendo a la presentación anterior de LP, definir las cláusulas semánticas para un lenguaje de primer orden no es complicado. La caracterización de los modelos es la misma que antes, sólo cambia el conjunto de valores de verdad, por lo cual ya no damos caracterizaciones duales para 1 y 0, sino tres únicas condiciones (para 1, 0 y N):

$V(Pt_1 \ldots t_n, M, s)=1$ sii $<t_1[M,s], \ldots, t_n[M,s]> \in P+$ y $<t_1[M,s], \ldots, t_n[M,s]> \notin P-$

$V(Pt_1 \ldots t_n, M, s)=0$ sii $<t_1[M,s], \ldots, t_n[M,s]> \in P-$ y $<t_1[M,s], \ldots, t_n[M,s]> \notin P+$

$V(Pt_1 \ldots t_n, M, s)=N$ sii $<t_1[M,s], \ldots, t_n[M,s]> \in P+$ y $<t_1[M,s], \ldots, t_n[M,s]> \in P-$

Por otro lado, la cuantificación funciona de la siguiente manera, donde min y max determinan el mínimo y el máximo valor en el orden $0 < N < 1$:

$V(\forall xA, M,s)= \min\{V(A,M,s[x/o]) :$ para todo $o \in D\}$

$V(\exists xA, M,s)= \max\{V(A,M,s[x/o]) :$ para todo $o \in D\}$

Es decir, el valor de "todo hombre es mortal" será el mínimo valor de la aplicación del predicado "x es mortal" a todos los objetos del dominio. Por ende, si alguno de los objetos del dominio no es mortal, el enunciado general será falso. Con la cuantificación existencial sucede lo inverso: si alguno de los casos particulares es verdadero, el existencial lo será. Ahora bien, si todos los casos son simplemente falsos o dialeteias, la cuantificación existencial será una dialeteia; y si todos los casos son simplemente verdaderos o dialeteias, la cuantificación universal será una dialeteia.

La traducción entre estas dos presentaciones es bastante sencilla. Siendo V una valuación del segundo tipo, y v una valuación del primer tipo, podemos simplemente decir que:

$V(A)=1$ sii $1 \in v(A)$ y $0 \notin v(A)$

$V(A)=0$ sii $0 \in v(A)$ y $1 \notin v(A)$

$V(A)=N$ sii $1 \in v(A)$ y $0 \notin v(A)$

La l gica de la verdad.indd 257 04/07/2014 13:47:41

La tercera y última manera de describir las cláusulas semánticas de LP es bastante menos intuitiva, sin embargo popular; Beall (2009) hace uso de ella. Asimismo, es útil para adelantar las cláusulas semánticas de los condicionales en el dialeteísmo. Esto se debe a que describiremos los conectivos de LP de manera *intensional*, no *extensional*. Decimos que un concepto lógico es *intensional* cuando lo evaluamos apelando no sólo al mundo "actual", sino también a otros mundos. Por ejemplo, el concepto de necesidad es intensional. Cuando decimos que necesariamente p, no estamos dando a entender sólo que p es verdadero, sino que también es verdadero (*a grosso modo*) en todos los mundos posibles.

Para introducir esta caracterización de los conectivos dialeteístas, haré entonces uso de un esquema de mundos. De los conectivos ahora vistos (negación, disyunción, conjunción), sólo la negación será intensional. En esta presentación, junto al mundo actual (@), habrá mundos posibles de dos tipos: normales (Norm) y anormales. Los mundos anormales son aquellos en donde las leyes lógicas (de la lógica caracterizada) no valen; hay en general algunos constreñimientos en ellos, pero varias leyes lógicas pueden fallar. Por ejemplo, en un mundo anormal del dialeteísmo puede fallar el tercero excluido, que es sin embargo una verdad lógica. En cambio, las leyes lógicas valen en todo mundo normal, lo cual incluye al mundo actual.

Tenemos entonces un modelo de LP caracterizado como $<W, Norm, @, *, \vDash>$, donde:

- W es el conjunto de mundos.
- Norm es el conjunto de mundos normales.
- @ es el mundo actual, y pertenece a Norm.
- * es una función de mundos en mundos. Designamos w* al resultado de aplicar la función * a w. En términos filosóficos, w* representa el "compañero asterisco" de w, que es un mundo idéntico a w sólo que, donde en w había dialeteias, en w* habrá vacíos de verdad, y viceversa. Por ejemplo, si en w es verdadero $A \wedge \neg A$, en w* no serán verdaderos ni A ni $\neg A$. Si aplicamos varias veces esa función, notacionalmente iteramos los asteriscos (w**, w***, etc.). Obviamente, por la manera en que es caracterizado, w**= w, así que la iteración de asteriscos en w no nos dará nuevos mundos sino un mundo idéntico a w o a w*. Es importante notar, sin embargo, que el compañero estrella w* de un mundo w puede ser anormal, siendo w normal.

La l gica de la verdad.indd 258 04/07/2014 13:47:41

- $\vDash$ es una relación de mundos a oraciones ($w \vDash A$ representa "el mundo w hace verdadero a A") , que se define de la siguiente manera:
  1. $w \vDash A$ o $w^* \nvDash A$, para todo mundo $w \in Norm$ [Exhaustividad]
  2. $w \vDash \neg A$ sii $w^* \nvDash A$
  3. $w \vDash A \vee B$ sii $w \vDash A$ o $w \vDash B$
  4. $w \vDash A \wedge B$ sii $w \vDash A$ y $w \vDash B$

(Vale aclarar que $\vDash$ tiene un comportamiento clásico, es decir, para toda oración A y mundo w, $w \vDash A$ o $w \nvDash A$; pero no pueden suceder ambas cosas a la vez.)

Una oración será válida en esta presentación de LP cuando sea verdadera en @ en todos los modelos. El caso general de validez es el siguiente:

(Validez **) Un argumento con premisas P y conclusión C es válido siempre y cuando en todo modelo de LP donde $@ \vDash S$ para todo $S \in P$, también sucede que $@ \vDash C$.

Podemos probar, por ejemplo, que ahora fallará Explosión. Tomemos la instancia $p, \neg p \vDash q$. Sea $<W,Norm, @, *, \vDash>$ un modelo con un mundo w y su compañero asterisco w^*; es decir, donde $W = \{@,@^*\}$. Sea @ tal que $@ \vDash p$ y $@ \nvDash q$. Sea $@^*$ un mundo anormal tal que $@^* \nvDash p$ y $@^* \nvDash \neg p$. Dadas las condiciones de verdad de la negación, sucederá que $@ \vDash \neg p$. Sin embargo, @ no hace verdadero a q. Por lo cual este modelo es un contraejemplo que demuestra la invalidez de $p, \neg p \vDash q$.

Probemos ahora que vale el tercero excluido. Supongamos que en un modelo M, $@ \nvDash A \vee \neg A$. Si esto sucede, por 2, $@ \nvDash A$ y $@ \nvDash \neg A$. Esto último implica que $@^* \vDash A$. Pero, siendo @ normal, $@ \nvDash A$ y $@^* \vDash A$ no puede suceder a la vez, puesto que contradice 1 ($w \vDash A$ o $w^* \nvDash A$ para todo mundo normal w). Absurdo.

La expansión a un lenguaje de predicados es ahora algo distinta. La denotación de las constantes será la misma en cada mundo. Pero cada predicado P en un modelo M tendrá una extensión posiblemente distinta en cada mundo w, llamada P_w. Entonces diremos que para un modelo M en una asignación s,

$M,s,w \vDash Pt_1 \ldots t_n$ sii $<t_1[M,s], \ldots, t_n[M,s]> \in P_w$

$M,s,w \vDash \forall x A$ sii $M,s[x/o],w \vDash A$ para todo $o \in D$

$M,s,w \vDash \exists x A$ sii $M,s[x/o],w \vDash A$ para algún $o \in D$

La l gica de la verdad.indd 259 04/07/2014 13:47:41

Es decir, las cláusulas para cuantificadores y fórmulas atómicas serán las tradicionales de la lógica modal de primer orden. Aquí no hace falta tener una extensión y una antiextensión para cada predicado en cada mundo, pues el rol de la anti-extensión lo cumple el complemento de a extensión en el compañero asterisco.

Esta formulación puede también traducirse a cualquiera de las dos anteriores. Por ejemplo, la traducción a la formulación trivalente es así, siendo $v(A)$ el valor semántico de A en el modelo v:

$@ \vDash A$ y $@^* \vDash A$ sii $v(A)=1$

$@ \vDash A$ y $@^* \nvDash A$ sii $v(A)=N$

$@ \nvDash A$ sii $v(A)=0$

Ejercicio 2. Probar la validez o invalidez de los siguientes razonamientos en LP:

a $A, \neg A \vDash (A \wedge \neg A) \wedge \neg(A \wedge \neg A)$

b $A, \neg A \wedge B \vDash A \vee B$

c $A, \neg(A \vee B) \vDash (A \wedge \neg A) \wedge B$

d $A, \neg A \vDash (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

Para los siguientes ejercicios, es recomendable usar el esquema de LP más sencillo, es decir, el trivalente.

Ejercicio 3. El sistema LP es frecuentemente usado por los dialeteístas como base para su teoría de la verdad contradictoria. Sin embargo, LP no es un sistema (simplemente) inconsistente, es decir, no tiene como teorema ninguna contradicción.[139] Pruebe esa afirmación para LP proposicional (recuerde que las valuaciones clásicas también son valuaciones de LP, y que los conectivos son normales, es decir, arrojan resultados clásicos ante inputs clásicos).

139. En general llamamos simplemente consistente a un sistema que implica tanto A como –A para alguna fórmula A. En cambio, un sistema es absolutamente inconsistente cuando implica todo teorema, es decir, cuando es trivial.

La l gica de la verdad.indd 260 04/07/2014 13:47:42

Ejercicio 4. Extienda el resultado del ejercicio anterior para probar que todo teorema de LP proposicional es también un teorema proposicional clásico.

Ejercicio 5. Pruebe por inducción que para toda fórmula tal que una valuación dialeteísta le asigna 0 o 1, hay una valuación clásica que le asigna el mismo valor. A partir de esto, pruebe que todo teorema clásico proposicional es un teorema de LP proposicional. Con esto se puede concluir que los teoremas de LP proposicional son los mismos que los de la lógica clásica proposicional.

3. Condicionales

Antes de describir estrictamente la *teoría de la verdad* dialeteísta, hace falta explicar su visión sobre los condicionales. Aquí es cuando diferentes propuestas dialeteístas se bifurcan. Pues las teorías de los condicionales que Priest y Beall formulan no forman parte de LP, sino que son teorizaciones ya externas a este sistema.

El condicional de LP tiene serios problemas. Análogamente a como hacemos en la lógica clásica o en K3, el condicional material de LP se define de la siguiente manera:

(Condicional material) $A \supset B =_{def} \neg A \vee B$

Por ende, la tabla de verdad será la siguiente:

$\supset$	1	0	N
1	1	0	N
0	1	1	1
N	1	N	N

Es decir, un condicional será falso solamente cuando el antecedente sea verdadero y el consecuente sea falso. Obviamente, LP validará la ley de identidad ($A \supset A$), porque ella equivale al tercero excluido. El problema central con este condicional es que no valida algunas inferencias centrales para el razonamiento común. Por ejemplo, el Modus Ponens. Es sencillo demostrarlo:

La l gica de la verdad.indd 261 04/07/2014 13:47:42

P	Q	P ⊃ Q	
1	1	1	*
0	1	1	
N	1	1	*
1	0	0	
0	0	1	
N	0	N	*!
1	N	N	*
0	N	1	
N	N	N	*

Podemos ver que en la tercera fila marcada, donde V(P)=N y V(Q)=0, ambas premisas tienen el valor designado B, mientras que la conclusión es simplemente falsa.

Un condicional que no valide el Modus Ponens no puede calificar como un condicional decente, al menos para gran parte de la comunidad filosófica.[140] Mucho peor que eso, el asunto también afecta a la teoría de la verdad dialeteísta. Pues los esquemas Tr('A') ⊃⊂ A), si fueran declarados verdaderos, no dirían algo demasiado fuerte. Un esquema T donde Tr('A') no implique A (o viceversa) no parece ser un esquema satisfactorio.

Por ende, hace falta agregar un condicional a LP que al menos valide *Modus Ponens*. Podríamos considerar que eso es lo mínimo que debería cumplir. Al mismo tiempo, consideremos las siguientes inferencias que valen para el condicional material clásico:

(Absorción) $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \vDash A \Rightarrow B$

(Aserción) $\vDash (A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$

La famosa paradoja de Curry muestra que un sistema donde vale la intersustutividad de A y Tr('A') cuando la oración no contiene negaciones (tanto Priest como Beall apoyan este requisito), y donde tenemos un condicional que cumpla Absorción y Aserción, lleva a paradojas. Sea C una oración equivalente a Tr('C') $\Rightarrow \bot$. Vale aclarar que el símbolo $\bot$ no intenta aquí nombrar una contradicción

140. Exceptuando en particular a McGee (1985), que considera que el *Modus Ponens* es inválido.

La l gica de la verdad.indd 262 04/07/2014 13:47:42

arbitraria, dado que algunas de ellas son verdaderas; representa en cambio una oración patentemente falsa (como 2+2=5). Podemos razonar de la manera siguiente:

1.	$C \Leftrightarrow (Tr(\text{`}C\text{'}) \Rightarrow \bot)$	[Diagonalización]
2.	$C \Rightarrow (C \Rightarrow \bot)$	[Intersubstitutividad T]
3.	$C \Rightarrow \bot$	[Absorción]
4.	$Tr(\text{`}C\text{'}) \Rightarrow \bot$	[Intersustitutividad T]
5.	C	[*Modus Ponens*, 1,4]
6.	$\bot$	[*Modus Ponens*, 3,5]

Así, los principios de Absorción y Aserción nos llevan a concluir ⊥, es decir, una oración claramente falsa. Por ende, nuestra teoría del condicional, si es que busca validar *Modus Ponens* pero sobrevivir a un lenguaje que contenga el Esquema T irrestricto, debe invalidar Aserción o Absorción. A continuación, expondré la propuesta más reciente de Priest (2006b) y la teoría de Beall (2009), que tienen más similitudes que diferencias entre sí: en particular, ambas rechazan Aserción y Absorción.

En ambas teorías del condicional es importante la apelación a mundos anormales o imposibles. Como antes señalé, estos son "mundos" donde las leyes lógicas de la teoría en cuestión pueden fallar. Por otro lado, como puede preverse, la caracterización del condicional es intensional.

En las teorizaciones sobre el condicional, una versión bastante popular sostuvo que el significado de "si A entonces B" era un condicional *estricto*, que a diferencia del condicional material, evalua la verdad de antecedente y consecuente también en mundos distintos al actual. En particular, el condicional estricto puede definirse así:

(Condicional estricto) $A \mapsto B =_{def} \Box(A \supset B)$

Por ende, si seguimos las cláusulas de la lógica modal, un condicional estricto será verdadero en un mundo siempre y cuando, en todos los mundos accesibles a partir de él, el antecedente sea falso o el consecuente sea verdadero. En términos filosóficos, esto tiene cierto sentido: cuando decimos "si cae la bolsa alemana,

La l gica de la verdad.indd 263 04/07/2014 13:47:42

cae la bolsa nortemericana", el condicional no es automáticamente verdadero, porque la bolsa alemana no haya caído, o porque la bolsa norteamericana sí lo haya hecho (como nos diría el condicional material). Para evaluar ese condicional nos fijamos qué sucedería en los mundos similares a este donde la bolsa alemana cayera; si en todos ellos la bolsa norteamericana también cae, entonces el condicional es verdadero.[141]

En términos formales, si tenemos una estructura $<W, R, V>$, donde W es el conjunto de mundos, R es la relación de accesibilidad entre mundos, y V es una función de valuación que asigna valores de verdad a oraciones en cada mundo, las condiciones de verdad de un condicional estricto se definen así:

$V(A \mapsto B, w) = 1$ sii para todo w' tal que wRw', $V(A,w')=0$ o $V(B,w')=1$

En general las teorías del condicional estricto utilizan un sistema de lógica modal llamado S4, en donde la relación de accesibilidad es reflexiva (es decir, todo mundo se accede a sí mismo) y transitiva (es decir, si w accede a w^* y w^* accede a w', entonces w accede a w'). Esto permite que, como resulta natural, se validen inferencias como $A \wedge \neg B \vDash \neg (A \mapsto B)$ (la prueba queda al lector).

El problema tradicional con los condicionales estrictos es que validan algunas inferencias que muchos filósofos consideran inválidas. Por ejemplo,

$A \mapsto (B \mapsto B)$
$A \mapsto (B \mapsto A)$

Algunas instancias de estas inferencias no parecen verdaderas, al menos a primera vista. Por ejemplo, "si hoy como chocolatada, entonces si el teorema de Fermat es verdadero, el teorema de Fermat es verdadero". No parece allí haber un uso razonable del condicional. Una instancia cuestionable de la segunda oración supuestamente válida es: "si Jack es mortal, entonces si toma una pócima de inmortalidad, es mortal".

141. Para una introducción un más profunda a la problemática de los condicionales, véase Read (1995).

La l gica de la verdad.indd 264 04/07/2014 13:47:42

Por otro lado, el condicional estricto valida tanto Absorción como Aserción, por lo cual no es demasiado útil para el dialeteísta. Por esa razón, los dialeteístas apelan a un condicional mucho más fuerte que el estricto (es decir, que valida menos oraciones), para el cual (como ya señalé) no vale absorción, aserción ni las oraciones cuestionables a y b.

¿Cómo hacer que algo como $P \Rightarrow (Q \Rightarrow Q)$ falle? Para el condicional material esto es imposible: el consecuente es una tautología. Para el condicional estricto, tampoco podemos lograr que falle. Puesto que en todo mundo w^* a que accedamos desde cualquier mundo w, el condicional $Q \Rightarrow Q$ será verdadero (probarlo es sencillo: en todo mundo a que w^* acceda, $Q \supset Q$ será verdadero dado que Q es verdadero o falso). La solución a este problema fue dada por los lógicos relevantistas. Consideramos que un condicional es relevantista (en lógica proposicional) cuando para toda verdad lógica de forma condicional, el antecedente y el consecuente comparten letras proposicionales.

La solución técnica de los relevantistas consiste en postular una relación de accesibilidad entre mundos *ternaria*. Un mundo no accede ya simplemente a otros mundos, sino que accede a pares de mundos. El sentido de esta relación de accesibilidad es todavía oscuro, aunque algunos intentaron darle una interpretación filosóficamente satisfactoria.[142] Para los relevantistas, el condicional se define así:

(Condicional relevantista) $v(A \Rightarrow B,w)=1$ sii para todo par de mundos $<w',w''>$ tal que $wR<w',w''>$ sucede que $v(A,w')=0$ o $v(B,w''=1)$.

Esta relación ternaria de accesibilidad permite que oraciones como $(Q \Rightarrow Q)$ sean falsas en algún mundo w. Sólo debe suceder que mundo w acceda a un par $<w',w''>$, tal que Q es verdadero en w' pero falso en w''. De todas maneras, si bien $(Q \Rightarrow Q)$ puede fallar en algún mundo, la mayoría de los filósofos relevantistas consideran que debería ser una verdad lógica. Hay distintas estrategias para lograr que esto suceda.

La vía que toman Beall y Priest es definir de manera relevantista los condicionales sólo en mundos anormales o imposibles. Eso hace que en mundos

142. Algunos, por ejemplo, sostienen que la relación de accesibilidad ternaria se explica con metáforas de la teoría de la información. Para una discusión sobre este intrincado asunto, véase Mares (2004b).

La l gica de la verdad.indd 265 04/07/2014 13:47:42

anormales ($Q \Rightarrow Q$) pueda fallar; pero en mundos normales, no. En mundos normales, el condicional se define, *a grosso modo*, similar al condicional estricto (en particular, cuando cada mundo accede a todos los mundos). Dado que la validez se define como preservación de verdad en mundos *normales* solamente, oraciones como ($Q \Rightarrow Q$) serán válidas.

Podemos adaptar ahora el condicional relevantista a los esquemas de Beall y Priest. Veamos primero el condicional de Priest. En su propuesta, los conectivos extensionales funcionan como en LP en todos los mundos. Pero el condicional funciona de la siguiente manera en mundos normales:

$1 \in v(A \rightarrow B,w)$ sii para todo mundo $w' \in W$, si $1 \in v(A,w')$ entonces $1 \in v(B,w')$
$0 \in v(A \rightarrow B,w)$ sii para algún mundo $w' \in W$, $1 \in v(A,w')$ y $0 \in v(B,w')$

Aquí ni siquiera se apela a una relación de accesibilidad binaria; un condicional es verdero en un mundo normal cuando en *todo* mundo, el antecedente es falso o el consecuente es veraddero. Asimismo, se agrega la restricción de que en mundos normales w, para toda letra proposicional p, $1 \in v(p,w)$ o $0 \in v(p,w)$. Dado que la validez es preservación de verdad en mundos normales, esto garantiza que se cumpla el tercero excluido para fórmulas construidas con los conectivos veritativo-funcionales (aunque obviamente el tercero excluido fallará en mundos anormales, incluso para fórmulas como p).

En cambio, en mundos anormales el condicional se definirá así:

$1 \in v(A \rightarrow B, w)$ sii para todo par de mundos $w',w'' \in W$ tal que $wR\langle w',w''\rangle$, si $1 \in v(A,w')$ entonces $1 \in v(B,w'')$

$0 \in v(A \rightarrow B, w)$ sii para algún par de mundos $w',w'' \in W$ tal que $wR\langle w',w''\rangle$, $1 \in v(A,w')$ y $0 \in v(B,w'')$

Así definida, la lógica no valida el tercero excluido para fórmulas condicionales, porque el valor de verdad de una fórmula condicional en un mundo normal puede depender del valor del antecedente y el consecuente en mundos anormales, donde el tercero excluido no vale. En particular, supongamos que queremos evaluar $p \rightarrow q$ en un mundo normal w, donde p y q son verdaderas. Supongamos que en

La l gica de la verdad.indd 266 04/07/2014 13:47:42

el modelo hay sólo un mundo más, w', donde $1 \in v(p,w')$ pero q no tiene valor definido. Si así fuera, dadas las cláusulas para el condicional en mundos normales, no sabríamos si 1 o 0 pertenecen a $v(p \rightarrow q,w)$. Para solucionar este problema, Priest sugiere agregar la Restricción de Aumento.

(Restricción de Aumento) Para todo mundo w donde hay un vacío de verdad sobre la oración A, existen dos mundos w+ y w- tales que w+ y w- hacen más oraciones verdaderas que w, y A es verdadera en w+ y falsa en w-.

Si la Restricción de Aumento se cumple, el tercero excluido se aplica también a fórmulas condicionales. Casos como el citado se solucionarían, ya que si bien el mundo anormal w' es indefinido respecto a q, habrá un mundo w'+ donde q es verdadero, y un mundo w'- donde q es falso. Así, $v(p \rightarrow q,w) = 0$.

El condicional de Priest es similar a la lógica relevantista básica B, aunque es un poco más fuerte (por ejemplo, valida $A \wedge \neg B \vDash \neg(A \rightarrow B)$).

Demos un contrajemplo en este condicional para el Modus Tollens, en la instanciación $\neg q, p \rightarrow q \vDash \neg p$. Sea $<W,Norm,V,R>$ un modelo tal que $W=Norm=\{w\}$. Supongamos que $V(p,w)=\{1\}$, por lo cual $V(\neg p,w)=\{0\}$. Mientras que $V(q,w)=\{0,1\}$, por lo cual $V(\neg q,w)=\{0,1\}$. Dadas las cláusulas del condicional de Priest, $V(p \rightarrow q,w)=\{0,1\}$. Por ende, las premisas del razonamiento tendrán el valor designado $\{0,1\}$, y la conclusión tendrá el valor no designado $\{0\}$.

El condicional de Beall es similar. Para mundos normales:

$w \vDash A \rightarrow B$ sii para todo $w' \in W$, si $w' \vDash A$ entonces $w' \vDash B$

Para mundos anormales, el condicional se define así:

$w \vDash A \rightarrow B$ sii para todo par de mundos $w',w'' \in W$ tal que $wR<w',w''>$, si $w' \vDash A$ entonces $w'' \vDash B$

La l gica de la verdad.indd 267 04/07/2014 13:47:42

Podemos ver cómo se invalida la oración $p \rightarrow (q \rightarrow p)$. Tenemos un contramodelo $<W, @, R, Norm, \vDash>$ donde $Norm=\{@\}, W = \{@, w1, w2, w3\}, w1R<w2w3>, w1 \vDash p, w2 \vDash q, w3 \nvDash p$. En este caso, $@ \nvDash p \rightarrow (q \rightarrow p)$. El condicional de Beall es el condicional de la lógica relevantista BX (cuya axiomatización expondré en el apéndice).

Hay algunas diferencias notorias entre ambos condicionales. En primer lugar, el condicional de Beall valida Contraposición ($(A \rightarrow B) \vDash (\neg A \rightarrow \neg B)$), mientras que el de Priest no. Esto será interesante para cuando aparezca el Esquema T.[143] Por otro lado, el condicional de Priest valida la inferencia $A \wedge \neg B \vDash \neg(A \rightarrow B)$, mientras que el de Beall no. Las pruebas de estos resultados son muy sencillas y quedan al lector. Para una lista de las inferencias que valida el condicional de Beall BX, véase Beall (2009) o Priest (2008).

Un problema serio de estos condicionales es que no parecen combinarse bien con la cuantificación. Hay inferencias intuitivamente válidas como "Si todos son mortales, entonces todos los hombres son mortales", que estas teorías declaran inválido. Esto se debe a razones muy claras: la cuantificación universal ranguea sobre este mundo, mientras que el condicional definido apela a otros mundos. Por ende, si en este mundo sucede que todos son mortales pero en otro mundo hay hombres que no son mortales, entonces "todos los hombres son mortales" será falso. Uno podría formalizar la oración con el débil condicional material de LP, y de hecho la inferencia será válida. El problema es que cuando hacemos una cuantificación restringida, el condicional que damos a entender debería cumplir *Modus Ponens*, y como hemos visto, el condicional material dialeteísta no lo hace.

Tanto Beall como Priest introducen un condicional nuevo (¡sí, ya van tres condicionales!). Este será un condicional que sirva particularmente para cuantificaciones restringidas, es decir, que valide el debilitamiento del condicional en oraciones cuantificadas (como la mencionada antes), y que al mismo tiempo valide *Modus Ponens*.

Priest (2006b) hace uso de una estrategia relativamente común en lógica relevantista. Uno puede definir una constante t, que representa la conjunción

143. Vale aclarar que Priest (1987: cap. 6) desarrolla *otro* condicional que sí respeta contraposición, pero éste no es tan relevante para su teoría.

La l gica de la verdad.indd 268 04/07/2014 13:47:42

de todas las verdades en el mundo actual @, y que por ende es verdadera en todo mundo posible que retenga esas verdades. El condicional restringido $A \infty B$ significará $(A \wedge t \rightarrow B)$. De esta manera, cuando consideramos otros mundos, éstos deben contener las mismas verdades que el actual; si en @ todo era mortal, entonces en otros mundos posibles donde valga t, todo será mortal también. De esta manera, la inferencia intuitivamente válida será validada. La validación del *Modus Ponens* es más sencilla. Supongamos que $A \infty B$ es verdadero en @, y A también lo es. Dado que t es verdadero en @, $t \wedge A$ lo será. Por ende, dado que el condicional $\rightarrow$ ya validaba *Modus Ponens*, la oración B será verdadera en @.

Beall (2009) propone varias opciones distintas, aunque señalaré simplemente la que considera apropiada actualmente (Beall, 2011). La definición del condicional restringido $A \infty B$ será ahora $((A \rightarrow B) \vee B)$. La solución parece demasiado sencilla para ser correcta, pero cumple con varios de los *desiderata* en cuestión. En particular, soluciona de manera sencilla la cuantificación restringida que mencionamos recién. Si en el mundo actual, se cumple que $\forall xA$, entonces también se cumplirá que $\forall x(C \vee A)$, no importa qué fórmula pongamos en el lugar de C. Es simplemente introducir una disyunción. Para el caso que nos interesa, de $\forall xMx$ podemos inferir que $\forall x ((Hx \rightarrow Mx) \vee Mx)$, y por ende podemos decir con nuestro condicional restringido que $\forall x (Hx \infty Mx)$. El *Modus Ponens* se valida también de manera sencilla: si A y $A \infty B$ son verdaderos en @, entonces $A \rightarrow B$ es verdadero en @ o B lo es. Si se da el primer caso, B será verdadero en @, porque $\rightarrow$ ya validaba *Modus Ponens*. En ambos casos, entonces, la verdad del consecuente B está garantizada.

Ejercicio 6. Pruebe que el teorema de la deducción, con el condicional material, falla en LP.

Ejercicio 7. Muestre cuáles de estas inferencias son válidas en los condicionales $\rightarrow$ de Beall y Priest (suponga que son inválidas e intente encontrar un contramodelo).

a. $A \wedge \neg B \vDash \neg(A \rightarrow B)$

b. $A \rightarrow B \vDash \neg B \rightarrow \neg A$ [Contraposición]

c. $\vDash (A \wedge A \rightarrow B) \rightarrow B$ [Aserción]

La l gica de la verdad.indd 269 04/07/2014 13:47:42

d. $A \rightarrow (A \rightarrow B) \vDash A \rightarrow B$ [Absorción]

e. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \vDash (A \vee B \rightarrow C)$ [OR]

4. Teorías de la verdad

Ya hemos visto la lógica dialeteísta con cierto detalle, al menos en sus presentaciones más filosóficamente relevantes. Queda por decir cuál es su teoría de la verdad. Éste no es un asunto demasiado complejo una vez aceptada la lógica dialeteísta; sin embargo, algunas complejidades hacen que valga la pena detenerse en la teoría de la verdad que Priest y Beall ofrecen.

En el caso de Beall, la teoría de la verdad ofrecida es filosóficamente muy simple. Él pretende responder a un *desideratum* que ninguna teoría de la verdad cumple (excepto la de Field): se trata de la intersustitutividad. Esto es, que para cualquier oración A que contenga una suboración B, el valor de verdad de A cuando reemplazamos B por Tr('B') seguirá siendo el mismo; y simétricamente, si contiene una suboración Tr('B'), el valor de verdad de A cuando reemplazamos su subfórmula Tr('B') por B será el mismo. La intersustitutividad puede resumirse simplemente en que cualquier ocurrencia de Tr('A') en contextos no opacos puede reemplazarse por A (y viceversa) sin alterar el valor de verdad de las oraciones involucradas.

La intersustitutividad hace que las contradicciones permeen los conceptos semánticos. Por ejemplo, si A y ¬A son verdaderos, también lo serán Tr('A'), ¬Tr('A'), Tr('¬Tr('A')'), ¬Tr('¬Tr('A')'), etc. Cualquier oración que sea verdadera y falsa sea asimismo *no verdadera*, por ejemplo. La lógica obtenida con LP, los condicionales de Beall e intersustitutividad se llama BXTT.

Beall (2009) probó que BXTT no es trivial. La prueba de no-trivialidad es para un dialeteísta lo que la prueba de consistencia es para los teóricos de la verdad tradicionales. Por eso nos detendremos con cierto detalle en esta prueba, que es además bastante atractiva matemáticamente.

La l gica de la verdad.indd 270 04/07/2014 13:47:42

Prueba de no-trivialidad de BXTT

De las presentaciones de LP que hemos hecho, tomaremos en cuenta el esquema trivalente, donde los valores se ordenan N <0, N<1. Decimos que una valuación v' extiende a otra valuación v ($v \leq v'$) cuando para toda oración atómica o condicional ($\rightarrow$) que v asigna 1 o 0, v' asigna lo mismo. Es decir:

(Extensión de valuaciones) $v \leq v'$ sii no hay una oración atómica o condicional A tal que $v(A)=0$ o $v(A)=1$ pero $v'(A) \neq v(A)$

Por inducción, podemos probar que si se da una extensión entre v y v' sólo para oraciones atómicas o condicionales, entonces también v' extiende a v en sentido general. Esto se debe a las valuaciones particulares de LP (ver ejercicio 8).

Antes que nada, agregamos un predicado Tr al lenguaje L de la aritmética, y obtenemos L+. La interpretación de Tr se da por etapas.

Etapa inicial. En la etapa inicial, $V0_0(Tr('A'))= N$ para todas las oraciones, mientras que $V0_0(A)$ es el valor de verdad de A en la teoría base aritmética (para oraciones que forman parte de ella). Las oraciones condicionales valen todas N. Los compuestos (como $Tr('A') \wedge B$) tienen el valor de verdad que LP les asigna en función de sus conectivos.

Luego, comienza un proceso de dos pasos para lograr un punto fijo para BXTT.

Paso 1. Punto fijo con el predicado Tr.

Regla de reseteo. Partiendo de Vj_0 (o para simplificar, simplemente V_0), se llega a un punto fijo kripkeano Vj_ω. Las etapas siguientes se calculan con la regla de "reseteo".

Para explicar la regla de reseteo, hace falta introducir dos conceptos nuevos. Decimos que A es *eventualmente 1 para k* cuando existe un $i \neq 0$ tal que para todo j que $i \leq j < k$, sucede que $V_j(A)=1$. De manera similar se define *eventualmente 0*. La idea es similar a la de estabilización, que aparece en Gupta y Belnap (véase el capítulo de este libro sobre ese tema).

La l gica de la verdad.indd 271 04/07/2014 13:47:43

Así podemos introducir la regla de reseteo:

$V_k(Tr('A'))= 1$ si A es eventualmente 1 para k

$V_k(Tr('A'))= 0$ si A es eventualmente 0 para k

$V_k(Tr('A'))= N$ si ninguna de esas cosas sucede

No es difícil probar que si $0<i\leq k$, entonces $V_i \leq V_k$. Dado que lo único que varía respecto a la valuación de fórmulas atómicas en cada etapa son las oraciones $Tr('A')$, sólo veremos qué pasa con esas oraciones (las oraciones condicionales tampoco varían en estas etapas). Por hipótesis inductiva, suponemos que para todo $j<k$, la hipótesis se cumple. Siendo $0<i\leq k$, supongamos que $V_i(Tr('A'))=1$, para probar que $V_k(Tr('A'))=1$ (el caso para cuando $Tr('A')$ es simplemente falsa es similar). Si esto es el caso, entonces $Tr('A')$ es eventualmente 1 para i. Por ende, para todo l entre i y k, $V_i \leq V_l$. Por definición de extensión, eso implica que $V_l('A')=1$. Entonces, A es eventualmente 1 en k, por lo cual $V_k(Tr('A'))=1$.

Lo que esto significa que es que a medida que la sucesión continúa, si una oración $Tr('A')$ adquirió el valor 0 o 1, nunca cambiará del valor en etapas siguientes. Por razones que ya mostró Kripke (y que aparecen en el capítulo dedicado a ello en este libro), cualquier oración A será tal que encuentre un valor como 0 o 1 en alguna etapa y lo retenga en etapas subsiguientes, o tal que permanezca en N para siempre (como la oración del mentiroso). La contabilidad de nuestro lenguaje garantiza que llegaremos a un punto fijo v_k en el cual las valuaciones no puedan ya extenderse mediante el "reseteo": es decir, $v_k=v_{k+1}$. Ese será nuestro punto fijo v_*.

Para resultados posteriores, hace falta también ver que cuando $v \leq v'$, entonces $v_i \leq v'_i$, siendo i el índice del número de etapa en este proceso de formación de punto fijo. Es decir, si partimos de valuaciones base que se extienden una a la otra, seguiremos teniendo valuaciones que se extienden una a la otra a lo largo de las etapas de formación del punto fijo. Podemos probarlo por inducción transfinita. Supongamos que el resultado se da para toda $i<k$, y probaremos que se da para k. Sólo hace falta considerar las oraciones $Tr('A')$. $v_k(Tr('A'))=1$ sii A es eventualmente 1 en k, como vimos en la definición. Por hipótesis inductiva, esto implica que A es eventualmente 1 en v'_k. Entonces $v'_k(Tr('A'))=1$. De aquí se sigue que si las valuaciones base se extienden, los mundos fijos también: es decir, que si $v \leq v'$, entonces $v_* \leq v'_*$. Llamemos a esto Observación sobre punto fijo.

La l gica de la verdad.indd 272 04/07/2014 13:47:43

Paso 2. Determinación nueva del modelo base

Con el valor de las oraciones en los puntos fijos kripkeanos que obtuvimos antes, que llamamos Vj, siendo j el número de vez que aplicamos el Paso 1, "reseteamos" el valor de las fórmulas condicionales y las del tipo Tr('A'). La regla de reseteo está basada en el condicional de RM3, idéntico a LP excepto que ahora (1⇒N)=0 y (N⇒0)=0:

⇒	1	N	0
1	1	0	0
N	1	N	0
0	1	1	1

Este condicional también es monótono: si V≤V',entonces V' extenderá a V para fórmulas del lenguaje con ⇒ también. Podemos probarlo por inducción sobre la complejidad de las fórmulas. Supongamos que V(A⇒B)=1; entonces V(A)=0 o V(B)=1. Por hipótesis inductiva, V'(A)=0 o V'(B)=1, por lo cual V'(A⇒B)=1. Este hecho será utilizado luego.

Podemos ahora describir la regla de reseteo, para j≠0: (V0 era $V0_0$, es decir, nuestro estado inicial antes de comenzar el paso 1).

Esta regla tiene dos partes, una para oraciones condicionales A→B, y otra para oraciones Tr('A'). Para condicionales, funciona así:

Vj(A→B)=1 sii $Vi_*(A⇒B) = 1$ para toda i<j

Vj(A→B)=0 sii $Vi_*(A ⇒ B) = 0$ para algún i<j

Vj(A→B)=N si no se cumplen ninguna de esas dos condiciones

Para explicar cómo la regla de reseteo del paso 2 se aplica a oraciones atómicas de la forma Tr('A'), hace falta nueva terminología. Definimos S *es eventualmente* 1 para k* como que existe una etapa i menor a k, tal que para todo j que i≤j<k, sucede que $Vj_*(S)=1$. La definición es muy similar a la anterior ("eventualmente" a secas), pero depende del comportamiento de las valuaciones en puntos fijos.

La l gica de la verdad.indd 273 04/07/2014 13:47:43

$V_k(Tr(\ulcorner A \urcorner))= 1$ si $Tr(\ulcorner A \urcorner)$ es eventualmente* 1 para k

$V_k(Tr(\ulcorner A \urcorner))= 0$ si $Tr(\ulcorner A \urcorner)$ es eventualmente* 0 para k

$V_k(Tr(\ulcorner A \urcorner))= N$ si ninguna de esas cosas sucede

Podemos ahora probar esta importante afirmación: Si $i \leq k$, entonces $V_i \leq V_k$. Es decir, si $i \leq k$, entonces V_k extiende las valuaciones de V_i para fórmulas atómicas y condicionales, y por ende para toda fórmula.

Empecemos probándolo para oraciones condicionales $A \rightarrow B$. La prueba es por inducción transfinita. Supongamos que la monotonicidad se da para todo $j<k$. Sea $i \leq k$ y $V_i(A \rightarrow B)=1$. Entonces, $V0_*(A \Rightarrow B)=1$. Por hipótesis inductiva, para todo $0<j<k$, $V0 \leq V_j$. Por la observación que hicimos respecto a los puntos fijos, $V0_* \leq V_{j*}$. Entonces $V_{j*}(A \Rightarrow B)=1$, por la observación que antes hicimos respecto a la monotonía de $\Rightarrow$. Por lo tanto, $V_k(A \rightarrow B)=1$. Cuando la oración $A \rightarrow B$ es falsa, esta demostración es trivial.

Demostraremos que si $i \leq k$, entonces V_k extiende a V_i en fórmulas atómicas. Como antes, sólo nos interesan las fórmulas atómicas $Tr(\ulcorner A \urcorner)$, pues el resto quedan fijas. Supongamos que $V_i(Tr(\ulcorner A \urcorner))=1$. Entonces existe un $j<i$, tal que $V_{j*}(Tr(\ulcorner A \urcorner))=1$. Por hipótesis inductiva, si $j<l<k$, entonces $V_j \leq V_l$. Por ende, $V_{j*} \leq V_{l*}$. Por definición de extensión entre valuaciones, esto implica que $V_{l*}(Tr(\ulcorner A \urcorner))=1$. Por lo tanto, $V_k(Tr(\ulcorner A \urcorner))=1$. El caso para 0 es similar.

Luego de aplicar la regla de reseteo para los condicionales y oraciones $Tr(\ulcorner A \urcorner)$, repetimos el paso 1. De este modo, tenemos una prueba en zigzag: primero damos N a todas las fórmulas condicionales o $Tr(\ulcorner A \urcorner)$ y aplicamos el paso 1 para ir pasando por $V0_0 V0_1 V0_2 V0_3 \ldots$ hasta obtener un punto fijo kripkeano $V0_*$, luego aplicamos el paso 2 para determinar el valor de los condicionales y fórmulas $Tr(\ulcorner A \urcorner)$ a partir de $V0_*$ y obtener $V1_0$. Así volvemos a aplicar el paso 1 y recorrer $V1_0 V1_1 V1_2 V1_3 \ldots$ hasta obtener el punto fijo $V1_*$. Volvemos ahora a aplicar el paso 2 para obtener $V2_0$ a partir de los valores de $V1_*$ y $V0_*$. Luego realizamos el paso 1, y así sucesivamente.

Dado que las valuaciones $V0, V1, V2 \ldots$ se van extendiendo a medida que las etapas avanzan, por razones de cardinalidad este proceso de zigzag nos dará un punto fijo $V\varepsilon = V\varepsilon+1$. En $V\varepsilon$, toda oración verdadera en el modelo estándar será

La l gica de la verdad.indd 274 04/07/2014 13:47:43

verdadera. Asimismo, valdrá el esquema T, es decir, $T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A$. Puesto que para todo $i < \varepsilon$, $V_{i*}(A) = V_{i*}(Tr(\ulcorner A \urcorner))$, las oraciones $V_{i*}(A \Rightarrow Tr(\ulcorner A \urcorner))$ y $V_{i*}(Tr(\ulcorner A \urcorner) \Rightarrow A)$ valdrán en ambos casos 1 o N, lo que hace que $V\varepsilon(T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A)$ valga también 1 o N. Dado que vale el esquema T, por inducción (y mediante el uso de condicionales) podemos probar que $V\varepsilon$ es transparente, aunque no haré la prueba aquí. También puede demostrarse que $V\varepsilon$ cumple con todos los axiomas de BX. La construcción prueba que BXTT no es trivial, porque $V\varepsilon$ hará falsa a toda oración que era falsa en el modelo estándar de la aritmética.

Luego de este largo análisis de la teoría de Beall, brevemente describiré la teoría de la verdad de Priest. Él considera que el contagio de contradicciones que surge a partir de la transparencia de la verdad es innecesario. Por lo tanto, propone una teoría de la verdad donde valen *todas* las instancias de este esquema T:[144]

(Esquema T de Priest) $\quad Tr(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A$

Pero sabemos que esto no implica intersustitutividad, ya que el condicional de Priest no valida Modus Tollens. Es decir, en ocasiones puede suceder que $\neg A$ sea verdadero pero $\neg Tr(\ulcorner A \urcorner)$ no lo sea. Un caso de este fenómeno es la paradoja del mentiroso: la oración "esta oración es falsa" es verdadera y falsa, pero no podemos decir que no es verdadera. La inteligibilidad de estas distinciones es objeto de disputa. Field (2008) sostiene que es difícil dar razones filosóficas para entender estos casos, mientras que Beall (2009), como recién vimos, prefiere la simpleza de mantener intersustitutividad. Priest (2002) probó la no-trivialidad de su lógica. Aquí no describiremos su prueba por razones de espacio.

Para añadir información relevante, vale mencionar cómo caracterizan Priest y Beall a las oraciones típicamente problemáticas:

(a) Mentiroso. Ambos consideran, como antes señalé, que se trata de una dialeteia. Sin embargo, dado el principio de parsimonia de Priest, esta

144. La derivación del esquema T en su teoría es técnicamente compleja, pero filosóficamente poco relevante (al menos, no ha formado parte de los debates alrededor del dialeteísmo). Para detalles, remito a Priest (2006b: cap. 9).

La l gica de la verdad.indd 275 04/07/2014 13:47:43

oración resulta Falsa y Verdadera pero no resulta *no verdadera*. Esto sí sucede, por el contrario, en la teoría de Beall, para quien la verdad se explica completamente con el principio inocente de transparencia.

(b) Honesto ("esta oración es verdadera"). Beall (2009) considera que se trata de una dialeteia. El asunto es complicado, porque el caso del Honesto no es un caso donde la contradicción se vea claramente justificada. La oración podría ser tanto verdadera como falsa, aunque no hay ninguna razón para que lo sea. Para Beall, la indeterminación es razón suficiente para que la oración sea dialeteia. Aquí es cuando aparece como opción razonable el sistema FDE, que acepta no sólo dialeteias, sino también vacíos de verdad. De hecho, Beall no se declara completamente en contra de esta opción, simplemente afirma que no hace a lo esencial de su teoría.

En cambio, Priest sostiene que la oración es falsa porque "no hay ningún hecho que la haga verdadera". Aquí tenemos otro problema: una noción de falsedad quizás excesivamente abarcativa. En particular, cuando introducimos el concepto de "hecho que hace verdadero a una proposición" las cosas se vuelven complejas. Para algunos metafísicos no hay hechos negativos, por lo cual la única manera de que A sea falsa es que ningún hecho haga verdadera a A. Pero para otros, en particular muchos anti-realistas, la ausencia de un hecho que haga verdadera a una proposición no establece que esa proposición sea falsa; de hecho, ese es uno de los argumentos intuitionistas a favor del rechazo del Tercero Excluido.

(c) Mentiroso reforzado ("esta oración no es verdadera"). En este caso, ambos la consideran una dialeteia, y asimismo una oración que es Verdadera, Falsa y No Verdadera.

(d) Curry ("si esta oración es verdadera, entonces Absurdo"). La oración de Curry es en ambos casos una oración *simplemente falsa*. Ambos aceptan el Modus Ponens, por lo cual la verdad de esta oración llevaría al Absurdo en sólo dos pasos.

Ejercicio 8. Pruebe que, en LP sin →, si una valuación v' extiende a otra valuación ven los valores de las letras proposicionales, entonces v' extiende a v en los valores de todas las fórmulas. (Debe usar inducción.)

La l gica de la verdad.indd 276 04/07/2014 13:47:43

Ejercicio 9.

a. ¿Considera que Beall y Priest caracterizan correctamente a la oración del Honesto?

b. ¿Considera correcto, en este contexto, el principio de Priest según el cual no debemos multiplicar las contradicciones innecesariamente?

5. ¿Dónde están las dialeteias?

Como toda posición filosófica, el dialeteísmo tiene muchas variantes. En el apartado anterior señalé, por ejemplo, que Priest intenta aplicar cierta parsimonia a las contradicciones, haciendo que ¬A no implique ¬Tr('A'), mientras que Beall no cree que esto sea sensato. Sin embargo, el debate en torno a cuántas dialeteias hay va mucho más allá de este caso.

En particular, puede decirse que los dialeteístas se dividen en dos: los minimalistas y los maximalistas (la división es mía, y en la literatura no aparece necesariamente así). Los dialeteístas minimalistas consideran que las únicas dialeteias provienen de conceptos semánticos como Verdad, Satisfacción, Referencia, etc. En ocasiones, la idea de los dialeteístas minimalistas es que no hay *hechos* inconsistentes, o que en algún sentido el mundo es consistente; todas las dialeteias provienen de algunos conceptos semánticos que los humanos creamos, y de las reglas que les dimos, útiles pero inconsistentes.[145]

145. E. Mares (2004a) sostiene que incluso contradicciones que utilizan conceptos "metafísicos" (como la identidad) son aceptables sin que esto conlleve creer en la inconsistencia del mundo, ya que las inconsistencias pueden estar generadas simplemente por la manera en que usamos los conceptos y no por la manera en que el mundo es. La posición de Mares (autodenominada "dialeteísmo semántico") no resulta estable, y tampoco es fácilmente comprensible. Pues uno podría argüir que toda verdad depende de cómo usamos los conceptos y no del mundo, por lo cual ninguna oración tendría contenido metafísico. Parece, de hecho, más razonable decir que el uso de nuestros conceptos y la configuración del mundo tienen una relación constitutiva, por lo cual la única manera de diferenciar entre una posición dialeteísta meramente "semántica" y otra "metafísica" es prestando atención a los conceptos

La l gica de la verdad.indd 277 04/07/2014 13:47:43

A diferencia de los dialeteístas minimalistas, los maximalistas encuentran dialeteias en otros lugares. Por ejemplo, pensemos en el instante preciso en que una copa se rompe. ¿Ese objeto es una copa, o no lo es? La respuesta de Priest (2006b) es que, en ese instante, ese objeto es y no es una copa. Lo mismo podemos decir en un caso similar: en el instante mismo en que uno se está moviendo, uno está y no está en el mismo lugar.

Otro caso típico son las contradicciones legales. Supongamos que en un estado radicalmente machista y pre-moderno se plantean las siguientes leyes:

a Ninguna mujer puede votar.

b Todos los terratenientes pueden votar.

Obviamente, hasta ese momento no había mujeres terratenientes. Pero supongamos que la modernidad llega, el machismo empieza a mermar y surge una mujer terrateniente. Cuando esto sucede, esa mujer *puede y no puede* votar.

Otro caso es el de la vaguedad. Supongamos que cierta persona no tiene ningún pelo; claramente diríamos que es pelado. Sin embargo, también creemos que si a un pelado le agregamos un pelo, no deja de ser pelado. El asunto es que ambas afirmaciones a la vez generan un problema: si al pelado absoluto le agregamos un pelo, sigue siendo pelado; si le agregamos otro, la situación no cambia; y así, indefinidamente, una persona con millones de pelos seguiría siendo pelada. La solución de Hyde (1997) es que hay casos claros donde el individuo es pelado (por ejemplo, cuando tiene dos pelos) y casos claros donde el individuo es no-pelado (por ejemplo, cuando tiene cinco mil pelos). Pero en los casos que no son claros, el individuo en cuestión *es pelado y no lo es*.

En general las razones del dialeteísta maximalista no son aceptadas. En los casos de vaguedad y cambio, suele pensarse que es más razonable una salida con vacíos de verdad: es decir, en el instante de cambio la copa ni es ni no es una copa; y en los casos difusos, el individuo ni es pelado ni no lo es. Por otro lado, en casos de inconsistencias legales, si bien este punto tiene más apoyo que los otros, suele sostenerse que el problema legal generado no es "la mujer puede y

que generan las dialeteias (y no al hecho, dudoso, de que nuestros conceptos pueden ser justificadamente inconsistentes sin que el mundo lo sea).

La l gica de la verdad.indd 278 04/07/2014 13:47:43

no puede comprar tierra", sino algo como "según la ley vigente, la mujer puede y no puede comprar tierra". De esta manera, la inconsistencia se internaliza. Un sistema legal inconsistente sería como una persona con creencias contradictorias: el hecho de que existan no prueba que el mundo es inconsistente. Sin embargo, la estrategia de así "internalizar" las contradicciones enfrenta el difícil desafío de explicar por qué creemos que "los ciudadanos argentinos mayores de edad tienen derecho a votar" es una afirmación verdadera a secas, y no una elipsis de "según la legislación nacional, los ciudadanos argentinos mayores de edad tienen derecho a votar".

Ejercicio 10. Un dilema moral es una situación en la cual uno debe hacer dos cosas incompatibles. Por ejemplo, uno debe salvar a dos niños distintos que se están ahogando, pero no puede salvar a ambos. Algunos filósofos tradicionales consideraron que estos eran casos de contradicciones (pues uno debe salvar al primer niño y al mismo tiempo no debe hacerlo). ¿Considera que el dialeteísmo puede dar un buen análisis de los dilemas morales?

6. Objeciones al dialeteísmo

El dialeteísmo no está libre de problemas. El primero de ellos, y el más comúnmente remarcado, es que se compromete con oraciones inconsistentes. Esto, definitivamente, no es un problema para el dialeteísta. Pero sí hace a su posición poco deseable para muchos otros filósofos, atados al principio de no-contradicción.

Para el dialeteísta, un apego excesivo a la ley de no-contradicción es a final de cuentas dogmático. De hecho, pocos filósofos, además de Aristóteles en la *Metafísica*, han dado razones positivas a favor de este principio. Respecto a esto, nada se le puede objetar al dialeteísta: es sano en filosofía discutir hasta el principio más básico. Pero sí se puede cuestionar si las razones para abandonar este principio son suficientes, o si los costos a pagar son demasiado altos. De las objeciones al dialeteísmo sólo tomaremos en cuenta las que atacan al dialeteísmo minimalista, pues es en él en quien cualquier dialeteísta finalmente se

La l gica de la verdad.indd 279 04/07/2014 13:47:43

refugia. Me ocuparé de dos de ellas, las más comunes: la primera afirma que el dialeteísmo no puede funcionar como lógica porque es demasiado débil como para capturar la mayor parte de nuestros razonamientos; la segunda objeta que el dialeteísmo no logra un lenguaje semánticamente cerrado, a menos que corra riesgo de revanchas. Sin embargo, mencionaré brevemente otras objeciones al final, que no son tan fuertes pero pueden resultar interesantes.

6.1 Perdemos varias leyes fundamentales del razonamiento

Una objeción típica al dialeteísmo es que la propuesta nos obliga a abandonar algunas reglas inferenciales que suelen resultarnos básicas, como el Silogismo Disyuntivo. Hay otras propuestas para solucionar las paradojas que no requieren el abandono de estos principios, desde las propuestas tarskianas hasta las paracompletas.

La respuesta que los dialeteístas dan a esta objeción es común entre los teóricos de la lógica no-clásica: uno puede "recapturar" los principios de la lógica clásica y hacer que funcionen para determinados dominios discursivos. El mismo G. Priest (2006b) propone una manera de recapturar, basándose en las ideas de lógica paraconsistente no-monótona de D. Batens. La idea de Priest es considerar, cuando tenemos ciertas teorías, sólo sus modelos consistentes. Esto se modela de la siguiente manera.

Decimos que M es un modelo del conjunto Z de oraciones cuando para todas ellas, M le asigna 1 o N. Asimismo, M! es la medida de inconsistencia de M; simplemente es el conjunto de oraciones a las cuales M le asigna N. Obviamente, si M es clásico, M! será el conjunto vacío; y por otro lado, si M es trivialista (es decir, le asigna N a toda oración), M! será el conjunto de todas las oraciones. Priest demuestra que podemos hacer un orden parcial entre modelos, donde el menor será el que postule menos contradicciones, y el mayor será el que postule más. El orden entre modelos se establece así:

(Orden entre modelos de inconsistencia distinta) $M < M^*$ sii $M! \subset M^*!$

Decimos que M es un *modelo mínimamente inconsistente* de Z cuando (a) M es un modelo-LP de Z y además (b) para cualquier modelo $M^* < M$, M^* no es un

La l gica de la verdad.indd 280 04/07/2014 13:47:43

modelo-LP de Z. Por ejemplo si Z es {p, q ∧ ¬q}, el modelo mínimamente inconsistente será el que le asigne N a q y 1 a p.

Finalmente, decimos que A es una *consecuencia en LP-mi* (LP mínimamente inconsistente) del conjunto Z, cuando todo modelo mínimamente inconsistente de Z, es también modelo de A. Por ejemplo, Z = {p ∧ ¬p, p ∨ q} implica lógicamente en LP-mi que p, pues todo modelo mínimanente inconsistente de Z asigna N a p, por lo cual es modelo de p. Sin embargo, Z no implica q, porque hay modelos mínimanente inconsistentes de Z donde p vale N y q vale 0 (en ellos, p ∨ q vale N).

Según Priest, así podemos rescatar el silogismo disyuntivo, por ejemplo. Pues W = {p ∨ q, ¬p} implica q, dado que en todo modelo mínimamente inconsistente de W, p vale 0 y q vale 1. Sin embargo, se trata de una noción no-monótona de consecuencia lógica. Es decir, puede suceder que un razonamiento válido se haga inválido con el agregamiento de alguna(s) premisa(s). En este caso, si agregamos la premisa p ∧ ¬p, tendremos ahora al conjunto W*= {p ∧ ¬p, p ∨ q, ¬p}. Pero este conjunto ya no implicará q, pues hay modelos mínimamente inconsistentes de W* que asignan N a p (y por ende N a p ∧ ¬p), N a p ∨ q y 0 a q.

Beall (2012) objeta a Priest que esta estrategia no logra su cometido. Pues el conjunto {(p ∧ ¬p) ∨ q} implica q en *LP-mi*, dado que el modelo mínimamente inconsistente de ese conjunto asigna 0 o 1 a p y 1 a q. Sin embargo, esto hace que LP-mi no sea una lógica preservadora de verdad. Puesto que puede pasar que p ∧ ¬p sea verdadera, q sea falsa y por lo tanto el argumento vaya de verdad a falsedad.

La crítica de Beall, sin embargo, no hace demasiado efecto en la propuesta de Priest, quien se defiende en Priest (2012). Porque éste último no propone *LP-mi* como una lógica, sino más bien como una herramienta para poder capturar la lógica clásica una vez adoptado el dialeteísmo. No es novedad para un dialeteísta que la lógica clásica lleva de verdad a falsedad. Pero aquí tenemos una lógica no-monótona, así que no estamos perdidos: cuando obtengamos p ∧ ¬p, el argumento dejará de valer y dejaremos de creer en q (para el ejemplo en cuestión). Beall sostiene que esto ata a la lógica mínimanente inconsistente a un ideal de "teoría final", pues sólo funciona bien cuando tenemos bien establecido el valor de verdad de todas las proposiciones. Pero es justamente eso lo que quiere Priest:

La l gica de la verdad.indd 281 04/07/2014 13:47:44

podemos movernos clásicamente siempre que tengamos cierta seguridad de que el contexto no admite contradicciones. Pero nuestra seguridad no es lógica, sino simplemente instrumental: por eso es posible que pasemos de verdades a falsedades siguiendo estos pasos. Parece entonces que la adopción de una lógica instrumental clásica no-monótona es una manera razonable de lograr la "recaptura" del razonamiento clásico.

6.2 No se logra un objetivo central: tener un lenguaje semánticamente cerrado

En general el dialeteísta se propone como alguien que no intenta solucionar las paradojas, sino aceptarlas (o en cualquier caso, superarlas). Uno de los motivos que lo guía es que ninguna otra teoría de la verdad logra realmente un lenguaje semánticamente cerrado, es decir, un lenguaje que pueda representar su propio aparato semántico. Las teorías jerárquicas despedazan nuestro concepto intuitivo de verdad, que es uniforme; mientras que las teorías paracompletas (Kripke) y de Revisión (Gupta/Belnap), sufren venganzas.

Según el dialeteísmo, la aceptación de contradicciones evita toda posibilidad de venganza y permite representar el aparato semántico con total precisión. Sin embargo, esa idea fue ampliamente discutida. Por ejemplo, en LP hay algunas oraciones que son simplemente falsas, otras que son simplemente verdaderas, y otras que son dialeteias. En la metateoría, esos conceptos no se intersecan. Pero supongamos que queremos expresar el concepto de "simplemente falso" con el predicado (u operador) SF, que cumpla los siguientes requisitos razonables (y que son ciertos en la metateoría):

SF1. $\vDash \mathrm{Tr}(\ulcorner A \urcorner) \vee \mathrm{SF}(\ulcorner A \urcorner)$ [es decir, todas las oraciones son verdaderas/dialeteias o simplemente falsas]

SF2. $\mathrm{Tr}(\ulcorner A \urcorner), \mathrm{SF}(\ulcorner A \urcorner) \vDash \bot$ [es decir, ninguna oración puede ser a la vez verdadera y simplemente falsa]

Si obtenemos (por ejemplo, mediante diagonalización) una oración A equivalente con SF ($\ulcorner A \urcorner$), entonces podemos razonar a partir de SF1 ($\mathrm{Tr}(\ulcorner A \urcorner) \vee \mathrm{SF}(\ulcorner A \urcorner)$) por casos:

a Caso I: $\mathrm{Tr}(\ulcorner A \urcorner)$.

A [Esquema T, Modus Ponens]

La l gica de la verdad.indd 282 04/07/2014 13:47:44

SF('A')	[Sustitución de equivalentes]
⊥	[SF2]

b Caso II: SF('A')

A	[Sustitución de equivalentes]
Tr('A')	[Esquema T, *Modus Ponens*]
⊥	[SF2]

De este modo, con la eliminación de la disyunción, obtenemos absurdo. Por eso, no podemos tener un predicado (o un operador) que funcione con FS1 y FS2.

La interpretación de Priest es previsible: "esta oración es simplmente falsa" es simplemente falsa y a la vez verdadera. Esto sucede también con muchas otras oraciones. Por ende, SF2 no puede ser una regla razonable. Uno podría preguntarse entonces qué sentido tiene el concepto de "simplemente falso" expresado en el lenguaje, si no evade la verdad. Priest dirá que nada evade de antemano la contradicción (en este caso, ser simplemente falso y a la vez verdadero), aunque este tipo de conceptos se aplican con certeza y sin contradicción en la mayoría de los casos. Por ejemplo, la oración 2+2=5 es simplemente falsa, y no es "también verdadera". Así lo declara también la teoría, pues LP tiene una manera de decir que la oración A es simplemente falsa: F('A') ∧ ¬Tr('A'). También puede apelar al condicional nuevo, y afirmar A → ⊥ (lo cual no lleva a paradojas porque, como antes vimos, el condicional no valida Absorción ni Aserción).

Respecto a oraciones como el Mentiroso, el concepto de "simplemente falso" representado como Fx ∧ ¬Tx tendrá una eficacia distinta según el marco teórico dialeteísta que adoptemos. Como antes señalé, Priest rechaza la inferencia de ¬A a ¬Tr('A'); en particular, la oración M del Mentiroso es tal que ¬M pero no podemos decir que ¬Tr('M'). Este es un caso, entonces, de oración falsa que no es simplemente falsa. De todas maneras, Fx ∧ ¬Tx está lejos de ser una representación satisfactoria de "simplemente falso", porque si así lo definiéramos, el mentiroso reforzado, que es una dialeteia, sería declarado simplemente falso también.

Desafortunadamente, Beall ni siquiera tiene disponible esta estrategia, pues acepta la inferencia de ¬A a ¬Tr('A'). Por ende, para él, toda dialeteia A será

La l gica de la verdad.indd 283 04/07/2014 13:47:44

tal que F('A') ∧ ¬Tr('A') es verdadero; es decir que, si definimos "simplemente falso" de esa manera, toda dialeteia será simplemente falsa. Eso tiende a mostrar que el concepto en cuestión no está bien representado en BXTT.

Lo mismo puede decirse con el concepto de "simplemente verdadero", aunque aquí ambos dialeteísmos coinciden: si definimos "simplemente verdadero" como Tr('A') ∧ ¬F('A'), resultará que todo aquello que sea verdadero, incluso las dialeteias, será simplemente verdadero; pues ambos definen la F('A') como ¬A.

Beall se toma en serio este problema, y lo trata simultáneamente al de "simplemente falso". Resuelto uno, se resuelve el otro, dado que "A es simplemente falso" sólo significa "es simplemente verdadero que ¬A". Como primer y ambicioso intento, definamos "simplemente verdadero" (ST) de esta manera:

(Simplemente verdadero – provisional) w ⊨ STr ('A') sii w ⊨ A y w *⊨ A

Esta es de hecho la condición precisa para que una oración sea simplemente verdadera en la teoría. Pero la introducción de este predicado u operador nos genera un problema. Pues con la noción de STr, podríamos definir un predicado u operador de "simplemente falso" que cumpla con FS1 y FS2, y por ende lleve al absurdo (después de todo, "es simplemente falso que A" equivale a "es simplemente verdadero que ¬A").

Beall propone tres soluciones posibles. La primera es generar una jerarquía de predicados STr, pero no la tomaremos en consideración porque claramente es una salida desafortunada para el dialeteísmo (cuyo principal mérito era justamente evitar jerarquías). La segunda, que tampoco trataré a fondo, es agregar un operador de Rechazo (R), con el que podemos expresar que una oración A es simplemente verdadera así: A ∧ R(A ∧ ¬A). Este operador, literalmente de rechazo, significa en algún sentido "es simplemente falso que"; aunque si bien cumple con SF1, no cumple con SF2. Beall no explica qué condiciones serían necesarias y suficientes para que R sea verdadera de una oración A. Sólo provee una condición suficiente:

(Condición suficiente para R) Si w ⊭ A, entonces w ⊨ RA

La l gica de la verdad.indd 284 04/07/2014 13:47:44

Dada la vaguedad conceptual que implica tener un operador con condiciones no definidas con precisión, esta salida no parece demasiado satisfactoria.

La última solución que Beall propone para expresar "simplemente verdadero" es quizás la más satisfactoria. Si en un modelo de BXTT tenemos una oración simplemente verdadera G (es decir, una oración tal que @ ⊨ G y @* ⊨ G), podemos expresar la noción de "simplemente verdadero" de la siguiente manera:

(Simplemente verdadero) $w \vDash STr(\ulcorner A \urcorner)$ sii $w \vDash G \rightarrow A$

Para poder hacer esto necesitamos restringir los modelos de BXTT a los no-triviales, es decir, a los que realmente hacen a alguna oración simplemente verdadera. Lo bueno es que esta expresión cumple con ciertos *desiderata* para el concepto de "simplemente verdadero":

1. $STr(\ulcorner A \urcorner) \vDash A$
2. $A \nvDash STr(\ulcorner A \urcorner)$
3. $\neg A, STr(\ulcorner A \urcorner) \vDash B$

Con esta última respuesta, podemos decir que el dialeteísmo, o al menos Beall, tiene una manera posible y bastante razonable de expresar el concepto de "simplemente verdadero", y por ende el de "simplemente falso" ("es simplemente verdadero que no es cierto que"). Aunque debe admitirse que el concepto en cuestión no cumple con *todas* las condiciones que filosóficamente querríamos (en particular, no es coextensivo con la noción metateórica de "simplemente verdadero").

Finalmente, la objeción de inexpresividad más reciente al dialeteísmo refiere a su incapacidad para expresar otro concepto semántico central: el de validez. Whittle (2004) mostró que si tenemos los siguientes principios, comúnmente aceptados por el dialeteísmo, obtenemos absurdo al expresar la noción de validez meidante un predicado:

1. Contracción: Si $A \wedge A \vDash B$, entonces $A \vDash B$
2. Separación de validez: Si $A \vDash B$ y A, entonces B

La l gica de la verdad.indd 285 04/07/2014 13:47:44

Supongamos que podemos representar la noción de validez ⊨ con el predicado Val(x,y), que significa "es válido deducir y de x". Si esto sucede, podemos formular una oración M que sea equivalente a Val('M','⊥').

Pero entonces podemos razonar así:

1.	Val('M ∧ Val('M', '⊥')', '⊥')	[Separación de validez (Esquema)]
2.	Val('M ∧ M', '⊥')	[Sustitución de equivalentes (Interna)]
3.	Val('M', '⊥')	[Contracción]
4.	M	[Sustitución de equivalentes]
5.	⊥	[Separación de validez]

De este modo, podemos obtener el absurdo a partir de la representación de ese predicado semántico. Esta parece una objeción mortal al dialeteísmo, que supuestamente es capaz de expresar todo predicado semántico.

De hecho, las soluciones al problema parecen excesivamente drásticas. Beall (2009) propone abandonar la Separación de validez, es decir, la idea de validez como preservación de verdad. Quizás esta sea la concesión más grande que el dialeteísmo hizo a una objeción. De todas maneras, recientemente Beall y Murzi (2012) sostuvieron que debemos abandonar Contracción. Esto también parece extremo, y de hecho es difícil mostrar cómo sin contracción se sigue sosteniendo la idea de validez como preservación de verdad. Mucho peor, tampoco es fácil ver en qué consiste la validez una vez que la regla estructural de Contracción fue abandonada. ¿Acaso dos ocurrencias de una misma oración tienen un contenido distinto que una sola ocurrencia? Algunos filósofos como Zardini (2011) sostienen que la falla en la contracción revela problemas de inestabilidad en las oraciones: así, apela a ideas parecidas a las de Gupta y Belnap. No es fácil determinar qué hacer, llegado este punto.

6.3 El autoboicot del dialeteísmo

Un último problema de LP, que mencionaré brevemente, es que prueba algunas oraciones que parecen contradecir la posición misma. Por ejemplo, como antes señalaba, LP prueba toda verdad lógica clásica, entre ellas la ley de no contradic-

La l gica de la verdad.indd 286 04/07/2014 13:47:44

ción. Es decir, en LP es un teorema que ¬(A ∧ ¬A). En lógica de primer orden, de hecho, es un teorema que ¬∃x(Tx ∧ Fx), es decir, que no hay contradicciones. Incluso cambia la noción de teoremicidad, puesto que los teoremas son oraciones siempre verdaderas, pero en ocasiones también falsas.

El dialeteísta se enfrenta a una situación dialéctica como esta:

No-Dialeteísta: –No es cierto que la oración del Mentiroso sea verdadera y falsa a la vez.

Dialeteísta: –Tenés razón. Pero también es cierto que la oración del Mentiroso es verdadera y falsa a la vez.

No-dialeteísta: –Parece que no entendés: ¡no hay contradicciones verdaderas!

Dialeteísta: –Es cierto. Pero también hay contradicciones verdaderas.

No parece, entonces, una posición dialéctica cómoda para el dialeteísta. El diálogo que acabo de citar parece escrito por Groucho Marx, pero debería ocurrir si un dialeteísta tomara en serio sus compromisos. De todas maneras, tanto Beall como Priest no ven esto como un problema, sino como el precio a pagar una vez que se entró en el juego de aceptar contradicciones.

De hecho, ambos sostienen que la manera de expresar el rechazo de cierta oración es pragmática, por lo cual no puede representarse semánticamente en LP. Es decir, si quisiera rechazar p no me alcanza con negar p, pues en el marco dialeteísta eso es compatible con aceptar p. La estrategia es entonces permitir la aceptación de p y ¬p a la vez, pero evitar que una oración determinada, en el plano pragmático, sea aceptada y rechazada a la vez. En pocas palabras: el rechazo de p implicará la aceptación de ¬p, pero la implicación no se dará en sentido inverso. Para un análisis de este problema, la mejor discusión está en Priest (2006a).

6.4 La anormalidad de los mundos anormales

Un punto central de la propuesta de Beall (y no tan central en Priest) es la apelación a mundos anormales. Existe en lógica una eterna tensión entre los

La l gica de la verdad.indd 287 04/07/2014 13:47:44

modelos como representaciones de algo o los modelos como un mero aparato instrumental. Priest (2006a) sostuvo que los modelos deben ser representaciones de alguna clase de entidad explicable filosóficamente. Por ejemplo, los modelos relevantistas representan situaciones, los clásicos representan mundos. La representación puede ser obviamente vaga e imprecisa, pero si recoge algunas notas centrales podría pensarse como satisfactoria.

Ahora bien, ¿qué intentan recoger los mundos anormales o imposibles? En ocasiones, estas entidades se utilizan para dar cuenta de representaciones no-lógicamente-ideales que ciertos agentes pueden tener del mundo. Sin embargo, en el caso de Beall y Priest, no hay mentes no-ideales o agentes en juego; el mapa parece ser metafísico.

La respuesta de Priest (2006b) en este caso es que, dado que no tenemos una teoría filosóficamente satisfactoria de los mundos imposibles, podemos usarlos como un aparato instrumental para validar algunas oraciones respectivas a los condicionales. Si bien se contradice a sí mismo (con Priest 2006a), esta es la reacción estándar y no suele causar demasiado escándalo. Todos sabemos que las semánticas de condicionales son complejas, y es probable que muchas de ellas no tengan una contraparte filosófica.

Ahora bien, el caso de Beall es distinto. Él apela a los mundos imposibles desde un principio. De hecho, cada mundo inconsistente tiene un "compañero asterisco" que es paracompleto. Sin embargo, no puede decírsele a Beall que él rechaza el tercero excluido en su generalidad, ¡porque los mundos en que falla son anormales! Lo que sí se le puede cuestionar es *qué significa* que en un mundo anormal falle el tercero excluido, o en términos más generales, qué significa un mundo anormal.

Algunos filósofos relevantistas (Restall, 1997) consideran que los mundos anormales representan estados en que las cosas *no podrían ser*. Sin embargo, esas explicaciones suelen quedar cortas. Pues incluso en los mundos anormales, existen algunas restricciones; por ejemplo, la valuación de $\neg\neg A$ y la a es la misma (en casi todos los sistemas relevantistas). ¿Por qué el mundo anormal puede ser de tal manera que haya vacíos de verdad en él, pero que sin embargo necesariamente respete la regla de doble negación? El problema aquí es fundamentalmente filosófico. El trabajo filosófico en gran medida se dedica a establecer los límites de lo posible. Esa tarea parece muy complicada, quizás irrealizable; finalmente muchos consideran que es una tarea sin sentido. Pero en cualquier caso, parece

La l gica de la verdad.indd 288 04/07/2014 13:47:44

valer la pena (o eso queremos creer). Ahora bien, si ya poner límites a lo posible es cuestionable y difícil, estudiar los límites de lo *im*posible puede parecer una mera quimera.

Quizá la vía de escape más sencilla, también para Beall, es pensar en los modelos como aparatos instrumentales. En ese caso, sería mejor que su caracterización de los conectivos sea más parecida a la de Priest, donde los mundos imposibles aparecen sólo al caracterizar al esquivo condicional.

7. Conclusión

Hemos visto a lo largo de este capítulo las principales propuestas del *dialeteísmo*, la posición según la cual hay oraciones verdaderas y falsas al mismo tiempo. Más allá de la reforma drástica que esto supone en nuestras intuitiones lógicas, el dialeteísmo logró articular racionalmente una posición a primera vista irracional. Quizás resida en eso su mérito. Como solución a las paradojas semánticas, su éxito es relativo. Los sistemas propuestos por Beall y Priest no parecen poder expresar satisfactoriamente todos los conceptos semánticos, en particular los de "simplemente falso" y "validez"; o si pueden, requieren reformas aún más drásticas en la lógica, como el cambio de sus reglas estructurales. Como visión general del mundo, todavía permanece como una alternativa interesante aunque poco razonable. Esto se debe a que las principales razones "metafísicas" para el dialeteísmo pueden bien ser resueltas con posiciones más conservadoras, como las de expresibilidad restringida o vacíos de verdad.

Sin embargo, nadie puede dudar que una lógica donde valen el esquema T de manera irrestricta y el tercero excluido debe ser tenida en cuenta. En cualquier caso, incluso si uno se aferra de manera recalcitrante al principio de No Contradicción, el diálogo con el dialeteísmo puede hacerlo perder la cofianza ciega en ese principio, y disponerlo a escuchar razones a favor y en contra de aquello que consideraba tan obvio.

La l gica de la verdad.indd 289 04/07/2014 13:47:44

Apéndice: axiomatizaciones de las teorías

La teoría LP posee un sencillo sistema de prueba por *tableaux*. Dado que en este libro no hemos adoptado el método de *tableaux*, introducirlo aquí requeriría una explicación detallada, que por razones de espacio no puedo dar. Los *tableaux de* LP pueden consultarse en Priest (2008).

Por otro lado, la teoría BX que utiliza Beall se axiomatiza de la manera siguiente:

A0. $A \vee \neg A$	LEM
A1. $A \rightarrow A$	Identidad
A2. $A \wedge B \rightarrow A$ y $A \wedge B \rightarrow B$	Simplificación
A3. $A \rightarrow A \vee B$ y $B \rightarrow A \vee B$	Adición
A4. $A \leftrightarrow \neg\neg A$	Doble Negación
A5. $(\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow \neg(A \wedge B)$	Ley de Morgan 1
A6. $(\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg(A \vee B)$	Ley de Morgan 2
A7. $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributividad
A8. $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))$	AND
A9. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$	OR
A10. $\forall xA \rightarrow A(t/x)$	
A11. $A(t/x) \rightarrow \exists xA$	
A12. $(A \wedge \exists xB) \rightarrow \exists x(A \wedge B)$	
A13. $\forall x(A \vee B) \rightarrow (A \vee \forall xB)$	
A14. $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists xA \rightarrow B)$	
A15. $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall xB)$	

R1. Si $\vdash A$ y $\vdash A \rightarrow B$, entonces $\vdash B$	*Modus Ponens*
R2. Si $\vdash A$ y $\vdash B$, entonces $\vdash A \wedge B$	$\wedge$-intro
R3. Si $\vdash A \rightarrow B$, entonces $\vdash (\neg B \rightarrow \neg A)$	Contraposición
R4. Si $\vdash A \rightarrow B$ y $\vdash C \rightarrow D$, entonces $\vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$	

La l gica de la verdad.indd 290 04/07/2014 13:47:44

A este sistema se le agrega la regla de transparencia, para obtener BXTT:

(Transparencia) Sean A o Tr('A') suboraciones de la oración F en un contexto no opaco. Modificar Tr('A') por A, o A por Tr('A'), dentro de esa oración F, no varía el valor de verdad de F.

Bibliografía

Batens, D. (2012): *Adaptative logics and dynamic proofs*, disponible online en: <http://logica.ugent.be>.

Beall, J. C. (2009): *Spandrels of truth*. Oxford, Oxford University Press.

— (2011): "Adding to relevant restricted quantification", en *Australasian Journal of Logic*, 10: 36-44.

— (2012): "Why Priest's reassurance is not reassuring", en *Analysis*, 73 (3): 517-525.

Beall, J. C. y Murzi, J. (2011): "Two flavors of Curry Paradox", en *The Journal of Philosophy*, disponible online en: www.academia.edu.

Field, H. (2008): *Saving Truth From Paradox*, Oxford, Oxford University Press.

Hyde, D. (1997): "From heaps and gaps to heaps of gluts", en *Mind*, 106: 641-660.

Mares, E. (2004a): "Semantic dialetheism", en Priest, G., Beall, J. C. y Armour-Garb, B. (eds.), *The law of non-contradiction*, Oxford, Oxford University Press.

— (2004b): *Relevant logic: a philosophical interpretation*, Cambridge, Cambridge University Press.

McGee, V. (1985): "A counterexample to Modus Ponens", en *The Journal Of Philosophy*, 82 (9): 462-471.

Priest, G. (2002): "Paraconsistent logics", en Gabbay, D. M y Gunthner, F. (eds.), *Handbook of Philosophical logic*, vol. 6, Dordredtch, Kluwer Academic Publishers, pp. 287-393.

— (2006a): *Doubt truth to be a liar*, Oxford, Oxford University Press.

— (2006b): *In contradiction*, Oxford, Oxford University Press.

La l gica de la verdad.indd 291 04/07/2014 13:47:44

— (2008): *An introduction to non-classical logic*, Cambridge, Cambridge University Press.
— (2012): "The sun may not, indeed, rise tomorrow", en *Analysis*, 72 (4): 739-741.
Priest, G., Beall, J. C. y Armour-Garb, B. (eds.) (2004): *The law of non-contradiction*, Oxford, Oxford University Press.
Read, S. (1988): *Relevant logic*, disponible online en: www.st-andrews.ac.uk.
— (1995): *Thinking about logic*, Oxford, Oxford University Press.
Restall (1997): "Way things can't be", en *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 38, N°4, pp. 583-596.
Whittle, A. (2004): "Dialetheism, logical consequence and hierarchies", en *Analysis*, vol. 64, N°284, pp. 318-326.
Zardini, E. (2011): "Paradox without contra(di)ction", en *The review of symbolic logic*, vol. 4, N°5, pp. 498-535.

Bibliografía comentada

Como señalé, la fuente principal del dialeteísmo sigue siendo *In contradiction* (Priest, 2006). El otro gran libro en defensa del dialeteísmo es Beall (2009). Priest (2002) es un resumen bastante técnico de las diferentes tendencias de la paraconsistencia, con varias de las demostraciones que aquí hicimos mejor detalladas. Para una excelente introducción a LP, las lógicas condicionales y las relevantistas (entre otras), recomiendo enfáticamente Priest (2008). Si las intuiciones del lector fueron más bien relevantistas que dialeteístas, puede continuar leyendo Read (1988) o Mares (2004b), aunque la bibliografía sobre lógica relevante no se caracteriza por ser particularmente clara. Para el debate filosófico general respecto a la ley de no-contradicción, el mejor libro hasta la fecha es Priest, Beall, y Armour-Garb (2004), donde se encuentran las más recientes defensas y los más recientes ataques al dialeteísmo. Para profundizar en lógicas adaptativas como LPmi, Batens (2012) puede ser muy útil.

La l gica de la verdad.indd 292 04/07/2014 13:47:44

La l gica de la verdad.indd 293 04/07/2014 13:47:44

La l gica de la verdad.indd 294 04/07/2014 13:47:44

La l gica de la verdad.indd 295 04/07/2014 13:47:44

Este ejemplar se terminó de imprimir en el mes de marzo de 2014
en **Talleres Gráficos Elías Porter**.
Plaza 1202, Ciudad de Buenos Aires, Argentina.
Tirada: 1000 ejemplares.

La l gica de la verdad.indd 296 04/07/2014 13:47:45